

BAC

محمد صابور

المتتاليات العددية

100 تمرين تطبيقي

البرنامج الجديد

محمد صابور

المتتـــاليـات الــعدديــة

100تمرين تطبيقي

البــرنامــج الــجديد

الشعب : علوم تجريبية - رياضيات – تقني رياضي

رقم الإيداع القانوني : 2007 - 3376

ردمك ISBN : 978-9947-0-1865-1

طبع بمطبعة ع - بن برج الكيفان (الجزائر)

المقدمة

بسم الله الرحمان الرحيم

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف المرسلين سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم .

أما بعد أخي القارئ أقدم إليك كتابا جديدا عنوانه المتتاليات العددية يضاف في سلسلة البكالوريا بين يديك .

يحتوي هذا الكتاب 100 تمرين تطبيقي منها المحلولة حلا مفصلا ومنها المرفقة بالنتائج فقط وأخرى مقترحة للحل كي يختبر بها الطالب المعلومات التي اكتسبها في هذا المحور .

وأخيرا أتمنى لكل القراء من طلبتنا الأعزاء التوفيق كما أرجو من زملائي أساتذة الرياضيات أن يمدوني بملاحظتهم البناءة لتحسين محتوى هدا الكتيب .

كما أشكر شكرا جزيلا كل من ساهم من بعيد أو قريب في انجاز هذا العمل المتواضع .

محمد صابور

الإهـــداء

أهدي هذا العمل المتواضع إلى :

- والدي الكريمين
- رجال التعليم المخلصين في عملهم
- أبنائي الطلبة متمنيا لهم التوفيق في

شهادة البكالوريا

الأستاذ: محمد صابور

المتتاليات العددية

المتتالية العددية

تعريف : نسمي متتالية عددية كل دالة من مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

نرمز إلى المتتالية العددية بـ : $(u_n), (v_n), (s_n), ...$

الأعداد الحقيقية $u_0, u_1, ..., u_n$ تسمى حدود المتتالية العددية (u_n)

العدد الحقيقي u_n يسمى الحد العام للمتتالية (u_n)

التمثيل البياني لمتتالية عددية

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول u_0 والعلاقة التراجعية

$u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f هي دالة معرفة على $\mathbb{N}$.

مجموعة النقاط $(u_n; f(u_n))$ هي التمثيل البياني في المستوي المنسوب إلى معلم للمتتالية (u_n).

المتتاليات الحسابية

تعريف : نقول بأن المتتالية (u_n) هي متتالية حسابية إذا وفقط وجد عدد حقيقي r بحيث أن من أجل كل عدد طبيعي $\mathbb{N}$ فإن : $u_{n+1} = u_n + r$.

يسمى العدد الحقيقي r أساس المتتالية (u_n)

الحد العام لمتتالية حسابية

(u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها العام u_n .

- إذا كان u_0 هو الحد الأول فإن : $u_n = u_0 + nr$
- إذا كان u_1 هو الحد الأول فإن : $u_n = u_1 + (n-1)r$

مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 فإن من أجل كل عدد طبيعي $\mathbb{N}$:

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (u_0 + u_n) \times \left(\frac{n+1}{2}\right)$$

S_n يساوي عدد الحدود مضروب في نصف مجموع الحد الأول والحد الأخير.

الوسط الحسابي

إذا كان a,b,c ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية حسابية فإن :

$a + c = 2b$ أي : $a + b + c = 3b$

المتتاليات الهندسية

<u>تعريف</u> : نقول بأن المتتالية (u_n) هي متتالية هندسية إذا وفقط وجد عدد حقيقي q بحيث أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_{n+1} = u_n \times q$

الحد العام لمتتالية هندسية

(u_n) متتالية هندسية أساسها q. - إذا كان الحد الأول هو u_0 فإن عبارة الحد العام هي : $u_n = u_0 \times q^n$

- إذا كان الحد الأول هو u_1 فإن عبارة الحد العام هي :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q حيث $q \neq 1$ فإن من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = u_0 \times \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

الوسط الهندسي

إذا كان a,b,c بهذا الترتيب تمثل ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية هندسية فإن : $a \times c = b^2$ أي : $a \times b \times c = b^3$

المتتاليات المتقاربة والمتباعدة

تكون المتتالية (u_n) متقاربة إذا كان $(\lambda \in \mathbb{R})$ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lambda$

تكون المتتالية (u_n) متباعدة إذا كانت ليست متقاربة

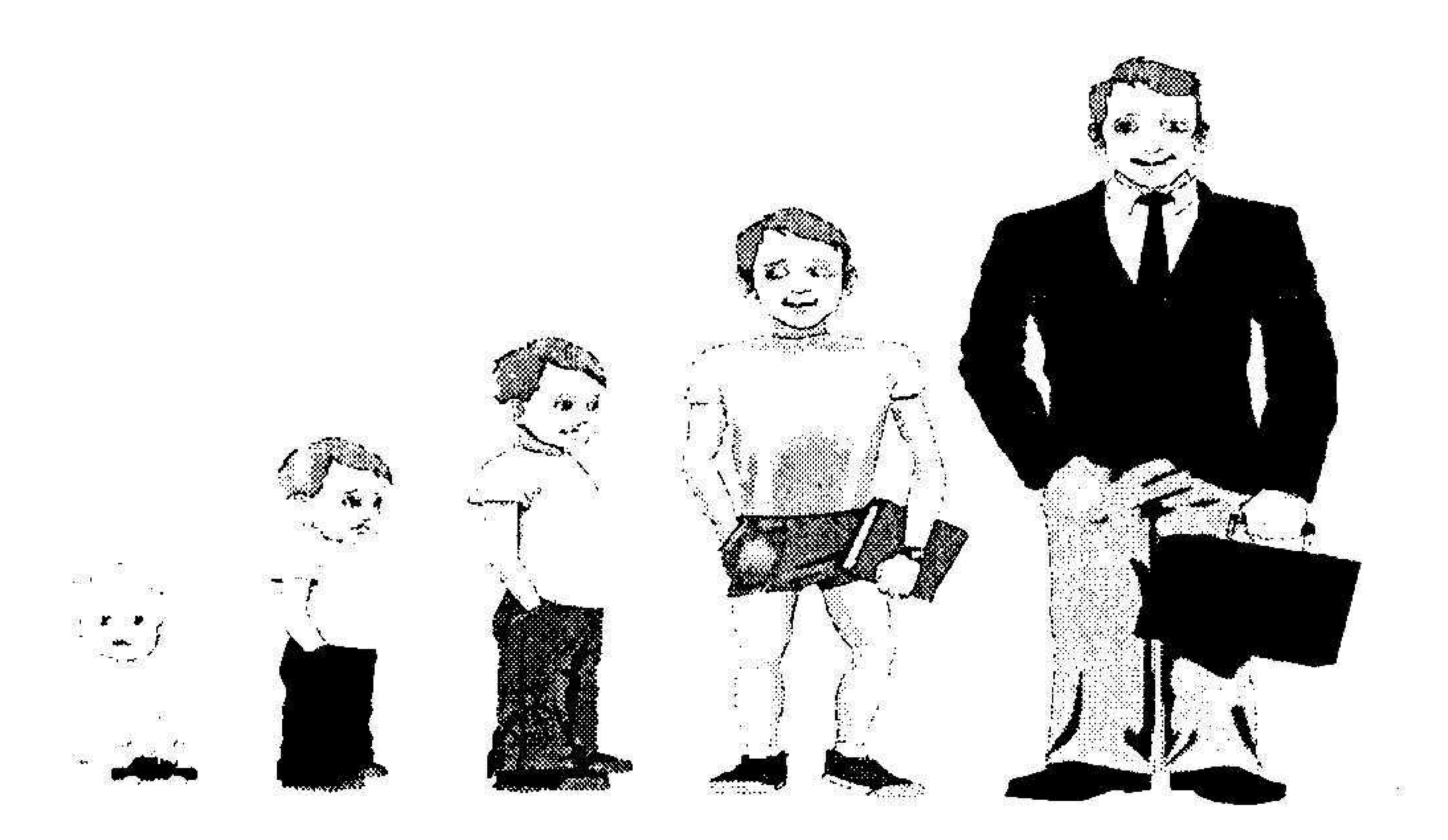
<u>ملاحظة</u> : - إذا كانت متتالية عددية متزايدة ومحدودة من الأعلى(majorée)فهي متقاربة .

- إذا كانت متتالية عددية متناقصة ومحدودة من الأسفل (minorée) فهي متقاربة .

نهاية متتالية هندسية

(u_n) متتالية هندسية أساسها q . - إذا كان $q > 1$ فإن : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$ وتكون المتتالية (u_n) <u>متباعدة</u> .

– إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ وتكون المتتالية (u_n) متقاربة. – إذا كان $q < -1$ تكون (u_n) متباعدة.



تمارين محلولة

تمرين 1

u_3, u_2, u_1 ثلاثة حدود لمتتالية حسابية حيث :

$u_1 + u_2 + u_3 = 36$ و $u_1 \times u_2 \times u_3 = 1428$.

عين u_3, u_2, u_1

الحل

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 36 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 1428 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} 3u_2 = 36 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 1428 \end{cases}$$

ومنه $u_2 = 12$ وبتعويض قيمة u_2 في الجملة السابقة نجد :

$$\begin{cases} u_1 + u_3 = 24 \\ u_1 \times u_3 = 119 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} u_3 = 24 - u_1 \\ u_1^2 - 24u_1 + 119 = 0 \end{cases}$$

ومنه ($u_1 = 17$ و $u_3 = 7$) أو ($u_1 = 7$ و $u_3 = 17$) إذن :

$(u_3 = 7, u_2 = 12 \ , u_1 = 17)$ أو $(u_3 = 17, u_2 = 12 \ , u_1 = 7)$

تمرين 2

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r و S_n هو مجموع n حدا الأولى من هذه المتتالية .

1) أحسب r و S_{15} علما أن : $u_0 = -3$ و $u_{14} = 25$

2) أحسب r و n علما أن : $u_0 = 2$ و $u_{n-1} = -15$ و $S_n = -117$

3) أحسب u_0 و r علما أن : $u_{n-1}=39$ و $n=20$ و $S_n=400$

الحل

1) $S_{15}=(u_0+u_{14})\times\frac{15}{2}=22\times\frac{15}{2}=165$

نعلم أن: $u_{14}=u_0+14r$ ومنه $25=-3+14r$ ومنه $r=2$

2) $S_n=u_0+...+u_{n-1}=(u_0+u_{n-1})\times\frac{n}{2}=-117$

ومنه : $-13\times\frac{n}{2}=-117$ ومنه : $n=117\times\frac{2}{13}=18$

$u_{n-1}=u_{17}=u_0+17r=2+17r=-15$ ومنه : $r=-1$

3) $S_n=S_{20}=(u_0+u_{19})\times\frac{20}{2}=(u_0+39)\times10=400$

ومنه : $u_0+39=40$ ومنه : $u_0=1$

لدينا : $u_{19}=u_0+19r=1+19r=39$ ومنه : $r=2$

تمرين 3

c,b,a بهذا الترتيب هي ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية حسابية مجموعها 333 ومجموع مربعاتها 37205. عين الأعداد c,b,a

الحل

c,b,a حدود متتابعة لمتتالية حسابية يعني : $2b=a+c$

ومنه : $a+b+c=3b=333$ ومنه : $b=111$

نعلم أن : $a=b-r$ و $c=b+r$ و $a^2+b^2+c^2=37205$

ومنه : $(b-r)^2+b^2+(b+r)^2=3b^2+2r^2=37205$

بما أن $b=111$ فإن : $2r^2=242$ ومنه : $r=-11$ أو $r=11$

إذا كان $r=11$ فإن $a=b-r=100$ و $c=b+r=122$

إذا كان $r=-11$ فإن $a=b-r=122$ و $c=b+r=100$

تمرين 4

عين الأعداد الحقيقية c,b,a حيث $a+b+c=\frac{19}{2}$

والأعداد $2a$, b , $(c-5)$ بهذا الترتيب هي حدود متتابعة لمتتالية حسابية مجموعها يساوي 9

الحل

$2a,b,(c-5)$ حدود متتابعة لمتتالية حسابية يعني :

$2b=2a+(c-5)$ ومنه $2a+b+c-5=3b=9$ ومنه $b=3$

وبتعويض $b=3$ في المعادلات السابقة نجد :

$$\begin{cases} a+c=\frac{13}{2} \\ 2a+c=11 \end{cases}$$

ومنه : $a=9/2$ و $c=2$.

إذن الأعداد الحقيقية المطلوبة هي : $a=9/2$, $b=3$, $c=2$

تمرين 5

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $u_{n+1}=4n+1$

1) بين أن (u_n) متتالية حسابية وعين أساسها r وحدها الأول u_1

2) هل العدد 2001 هو حد من حدود هذه المتتالية ؟

3) ما قيمة ورتبة الحد الذي نبدأ منه حتى يكون مجموع 20 حدا متتابعا من هذه المتتالية مساويا 1100.

4) أحسب الجداء : $2^1\times 2^5\times 2^9\times\ldots\times 2^{4n+1}$

الحل

1) $u_{n+1}-u_n=(4n+1)-\left[4(n-1)+1\right]=4$. إذن (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_1=4\times 0+1=1$ وأساسها $r=4$

2) نعلم أن $u_{n+1}=4n+1$ ، إذن يكون العدد 2001 حد من حدود المتتالية (u_n) إذا وجد عدد طبيعي n بحيث : $2001=4n+1$

نلاحظ أن $n=500$ لأن : $2001=4\times 500+1$.

إذن 2001 هو حد من حدود المتتالية (u_n)

3) لنرمز بـ u_p للحد الأول الذي نبدأ منه ويكون الحد العشرين u_{p+19}

نعلم أن $u_p+u_{p+1}+\ldots+u_{p+19}=\left(u_p+u_{p+19}\right)\times\frac{20}{2}=1100$

لدينا : $u_p=u_1+(p-1)\times r=1+4(p-1)=4p-3$

$u_{p+19}=u_1+(p+19-1)\times r=1+4(p+18)=4p+73$

$\left(u_p+u_{p+19}\right)\times 10=1100$ ومنه $8p+70=110$ أي $p=5$

إذن الحد الأول الذي نبد منه هو u_5 وقيمته هي :

$u_5=1+4\times 4=17$

4) $2^1\times 2^5\times\ldots\times 2^{4n+1}=2^{1+5\ldots+(4n+1)}=2^{(2n+1)(n+1)}$

لأن $1+5+\ldots+(4n+1)$ يمثل مجموع لـ $(n+1)$ حد لمتتالية حسابية حدها الأول 1 وحدها الأخير $4n+1$

ونعلم أن : $1+5+\ldots+(4n+1)=(2n+1)(n+1)$

تمرين 6

نعتبر المتتالية الهندسية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 وأساسها q بحيث : $(u_6\neq 0)$ $8u_6=125u_9$. 1) أحسب q

2) أحسب بدلالة u_0 و n المجموع $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$

3) عين u_0 بحيث $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=150$.

4) نفرض أن $u_0=90$. عين أصغر قيمة العدد الطبيعي p حيث من أجل كل عدد طبيعي n أكبر أويساوي p يكون لدينا :

$$n\geq p:\quad u_n\leq 10^{-3}$$

الحل

1) $8u_6=125u_9$ ومنه $8u_0\times q^6=125u_0\times q^9$ ومنه

$q^3=\frac{8}{125}=\left(\frac{2}{5}\right)^3$ يعني أن: $q=\frac{2}{5}$

2) $$S_n=u_0+..+u_n=u_0\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{5}{3}u_0\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right]$$

3) لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{3} u_0 \left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right] = 150$

ونعلم أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} = 0$ ومنه $\frac{5}{3}\ u_0 = 150$ ومنه $u_0 = 90$

4) $u_n = u_0 \times q^n = 90\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$. بإعطاء القيم 1، 2، 3 ...، إلى العدد الطبيعي n نجد :

$u_1 = 36\ ,\ u_2 = 14{,}4\ ,\ u_3 = 5{,}76\ ,....,\ u_{12} = 0{,}0015$

$u_{13} = 0{,}0006$

نلاحظ أنه ابتداء من u_{13} تكون الحدود أقل من 10^{-3} أي: $u_n \le 10^{-3}$

إذن أصغر قيمة العدد الطبيعي p هي $p = 13$.

يمكن استعمال اللوغارتم للوصول إلى هذه النتيجة .

تمرين 7

u_5, u_4, u_3, u_2, u_1 خمسة حدود لمتتالية هندسية . عين هذه الحدود علما أن : $u_3 > 0$ و $u_1 \times u_5 = 81$ و $u_2 + u_3 + u_4 = 39$

الحل

$$u_1 \times u_5 = u_1 \times u_1 \times q^4 = \left(u_1 \times q^2\right)^2 = \left(u_3\right)^2 = 81$$

ومنه $u_3 = 9$ لأن $u_3 > 0$. نعلم أن $u_2 = \frac{u_3}{q}\ ;\ u_4 = u_3 \times q$

لدينا $u_2 + u_3 + u_4 = 39$ ومنه : $u_2 + u_4 = \frac{9}{q} + 9q = 30$

ومنه : $\frac{3}{q} + 3q = 10$ ومنه : $3q^2 - 10q + 3 = 0$

و منه $q = 3$ أو $q = 1/3$. إذا كان $q = 3$ فإن:

$u_1 = 1\ ,\ u_2 = 3\ ,\ u_3 = 9\ ,\ u_4 = 27\ ,\ u_5 = 81$

إذا كان $q = \frac{1}{3}$ فإن :

$u_1 = 81\ ,\ u_2 = 27,\ u_3 = 9\ ,\ u_4 = 3\ ,\ u_5 = 1$.

تمرين 8

c, b, a ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية حيث مجموعها 63 و جداؤها 1728 . عين هذه الحدود

الحل

c,b,a ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية هندسية يعني : $a \times c = b^2$

ومنه $a \times b \times c = b^3 = 1728$ ومنه : $b^3 = 12^3$ إذن : $b = 12$

وبتعويض $b = 12$ في ما سبق نجد :

$$\begin{cases} a \times c = 144 \\ a + c = 51 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} a = 51 - c \\ c^2 - 51c + 144 = 0 \end{cases}$$

ومنه $(c = 3\ ,\ a = 48)$ أو $(c = 48\ ,\ a = 3)$

إذن الأعداد c,b,a المطلوبة هي :

$(c = 3\ ,\ b = 12\ ,\ a = 48)$ أو $(c = 48\ ,\ b = 12\ ,\ a = 3)$

تمرين 9

$u_1 \ , \ u_2 \ , \ u_3$ ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية موجبة حيث

$u_1+u_2+u_3=7$ و $\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}=\frac{7}{4}$. أحسب u_1,u_2,u_3

الحل

$$u_1+u_2+u_3=u_1+u_1q+u_1q^2=u_1\left(1+q+q^2\right)=7 \quad (*)$$

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_1q}+\frac{1}{u_1q^2}=\frac{q^2+q+1}{u_1q^2}=\frac{7}{4} \quad (**)$$

بتقسيم $(*)$ على $(**)$ نجد $u_1^{\ 2}\times q^2=\left(u_1\times q\right)^2=\left(u_2\right)^2=4$

ومنه $u_2=2$ (لأن حدود المتتالية موجبة) .

بتعويض u_2 في ما سبق نجد :

$$\begin{cases} u_1+u_3=5 \\ \frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_3}=\frac{5}{4} \end{cases}$$ ومنه $$\begin{cases} u_1+u_3=5 \\ \frac{u_1+u_3}{u_1\times u_3}=\frac{5}{4} \end{cases}$$ ومنه $$\begin{cases} u_1+u_3=5 \\ u_1\times u_3=4 \end{cases}$$

ومنه $$\begin{cases} u_1=5-u_3 \\ u_3^{\ 2}-5u_3+4=0 \end{cases}$$ ومنه $$\begin{cases} u_1=5-u_3 \\ u_3=4 \vee u_3=1 \end{cases}$$

إذا كان $u_3=4$ فإن $u_1=1$ وإذا كان $u_3=1$ فإن $u_1=4$

إذن $\left(u_1=1 \ , \ u_2=2 \ , \ u_3=4\right)$ أو $\left(u_1=4 \ , \ u_2=2 \ , \ u_3=1\right)$

تمرين 10

عين الأعداد الحقيقية a,b,c التي تحقق الشروط الآتية :

- a,b,c بهذا الترتيب هي ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية حسابية
- a,c,b بهذا الترتيب هي ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية هندسية
- $a+b+c=30$

الحل

$a \ , \ b \ , \ c$ حدود متتابعة لمتتالية حسابية يعني $a+c=2b$ ومنه :

$a+b+c=3b=30$ ومنه $b=10$

a,c,b حدود متتابعة لمتتالية هندسية يعني $c^2=ab$

وبتعويض $b=10$ في ماسبق نجد $a+c=20$ و $c^2=10a$

ومنه : $\left(a=\frac{c^2}{10} \right.$ و $\left. \frac{c^2}{10}+c=20 \right)$

ومنه : $\left(a=c^2/10 \right.$ و $\left. c^2+10c-200=0 \right)$

ومنه $c=10$ أو $c=-20$. إذن الأعداد a,b,c المطلوبة هي :

$\left(a=10 \ , b=10 \ , c=10\right)$ أو $\left(a=40 \ , \ b=10 \ , \ c=-20\right)$

تمرين 11

a,b,c بهذا الترتيب تمثل حدود متتابعة لمتتالية هندسية حيث :

$a+b+c=312$ و $c-a=192$. عين a,b,c

الحل

$$a+b+c=a+aq+aq^2=a\left(1+q+q^2\right)=312 \quad (*)$$

$$c-a=aq^2-a=a\left(q^2-1\right)=192 \quad (**)$$

بتقسيم $(*)$ على $(**)$ نجد : $\frac{q^2+q+1}{q^2-1}=\frac{312}{192}=\frac{13}{8}$

ومنه $8\left(1+q^2+q\right)=13\left(q^2-1\right)$ ومنه $5q^2-8q-21=0$

ومنه $q=3$ أو $q=-\frac{7}{5}$. إذا كان $q=3$ ، من المعادلة $(*)$ نجد:

$$a=\frac{312}{13}=24\ ,\ b=aq=24\times3=72\ ,\ c=bq=216$$

إذا كان $q=-\frac{7}{5}$ من المعادلة $(**)$ نجد: $\frac{24}{25}a=192$

ومنه $a=200$ و $b=aq=-280$ و $c=bq=392$.

تمرين 12

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ أساسها q حيث $0<q<1$

عين الحد العام u_n علما أن :
$$\begin{cases} u_2\times u_3\times u_4=64 \\ u_2^2+u_3^2+u_4^2=\frac{1456}{9} \end{cases}$$

الحل

$u_3^2=u_2\times u_4$ ومنه $u_2\times u_3\times u_4=u_3^3=4^3$ ومنه $u_3=4$

نعلم أن : $u_2=u_3\div q$ و $u_4=u_3\times q$.

ومنه : $u_2^2+u_3^2+u_4^2=u_3^2\left(\frac{1}{q^2}+q^2+1\right)=\frac{1456}{9}$

ومنه : $16\left(\frac{q^4+q^2+1}{q^2}\right)=\frac{1456}{9}$ ومنه:

$\frac{91}{9}=\frac{q^4+q^2+1}{q^2}$ ومنه : $9q^4-82q^2+9=0$.

بوضع $q^2=x$ نحصل على المعادلة : $9x^2-82x+9=0$

وحلولها هي : $x_1=9$ أو $x_2=1/9$.

بما أن $0<q<1$ و $q^2=x$ فإن $q=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$.

لدينا: $u_3=u_0q^3=u_0\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=4$ ومنه: $u_0=4\times27=108$

إذن : $u_n=u_0\times q^n=108\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

تمرين 13

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث :
$$\begin{cases} u_0\times u_2=3u_1 \\ u_0+u_1+u_2=13 \end{cases}$$

1) أحسب u_2 , u_1 , u_0.

2) أحسب الحد العام u_n بدلالة n للمتتالية الهندسية المتزايدة.

الحل

نعلم أن $u_0\times u_2=u_1^2$ (الوسط الهندسي) ولدينا $u_0\times u_2=3u_1$

ومنه : $u_1^2=3u_1$ ومنه : $u_1=3$ و $u_0+u_2=10$

نعلم أن $u_0 = \frac{u_1}{q}$ و $u_2 = u_1 q$ ومنه : $\frac{3}{q} + 3q = 10$

ومنه: $3q^2 - 10q + 3 = 0$ ومنه : $q = 3$ أو $q = 1/3$.

إذا كان $q = 3$ فإن : $u_0 = u_1 \div q = 1 , u_1 = 3 , u_2 = u_1 q = 9$

إذا كان $q = 1/3$ فإن : $u_0 = u_1 \div q = 9 , u_1 = 3 , u_2 = 1$

إذا كان $q = 3$ فالمتتالية (u_n) متزايدة ويكون حدها العام :

$$u_n = u_0 \times q^n = 3^n$$

تمرين 14

عين العددين الحقيقيين الموجبين b, a حيث :

- $a , (6a - b) , (a + 2b)$ هي حدود متتابعة لمتتالية حسابية .
- $a , (b + 1) , (4b - a)$ هي حدود متتابعة لمتتالية هندسية .

الحل

$a, (6a - b), (a + 2b)$ حدود متتابعة لمتتالية حسابية يعني أن :

$a + (a + 2b) = 2(6a - b)$ ومنه : $5a = 2b \ (*)$

$a, (b + 1), (4b - a)$ حدود متتابعة لمتتالية هندسية يعني أن :

$$(b + 1)^2 = a(4b - a) \ (**)$$

من المعادلة $(*)$ نجد : $b = \frac{5a}{2}$ وبالتعويض في $(**)$ وبعد النشر والتبسيط للمعادلة نجد : $11a^2 - 20a - 4 = 0$

وجذور هذه المعادلة هي : $a = 2$ أو $a = -\frac{2}{11}$ (مرفوض)

إذن : $a = 2$ و $b = \frac{5a}{2} = 5$

تمرين 15

(u_n) متتالية هندسية موجبة ومتزايدة ، حدها الأول u_1 وأساسها q .

1) عين الحدود u_1 , u_2 , u_3 , u_4 علما أن :

$u_1 \times u_2 \times u_3 \times u_4 = 64$ و $u_2 + u_3 = 6$

2) أحسب u_n بدلالة n . هل (u_n) متقاربة ؟

الحل

1) u_1 , u_2 , u_3 , u_4 حدود متتالية هندسية فإن $u_1 \times u_4 = u_2 \times u_3$

ومنه : $u_1 \times u_2 \times u_3 \times u_4 = (u_2 \times u_3)^2 = 64 = 8^2$.

ومنه $u_2 \times u_3 = 8$ (لأن $u_2 > 0$ و $u_3 > 0$) . لدينا :

$$\begin{cases} u_2 + u_3 = 6 \\ u_2 \times u_3 = 8 \end{cases} \quad \text{ومنه :} \quad \begin{cases} u_3 = 6 - u_2 \\ u_2^2 - 6u_2 + 8 = 0 \end{cases}$$

ومنه : $(u_2 = 2$ أو $u_2 = 4)$ و $u_3 = 6 - u_2$.

إذا كان $u_2 = 2$ فإن $u_3 = 6 - u_2 = 4$ ((u_n) متزايدة) .

إذا كان $u_2 = 4$ فإن $u_3 = 6 - 4 = 2$ (u_n) متناقصة (مرفوضة)

ويكون q أساس المتتالية (u_n) المتزايدة يساوي : $q = u_3 \div u_2 = 2$

إذن : $u_1 = u_2 \div q = 1$ و $u_4 = u_3 \times q = 8$

2) $u_n = u_1 q^{n-1} = 2^{n-1}$. لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ إذن (u_n) متباعدة

تمرين 16

1) أثبت أنه إذا كان x , y , z ثلاثة أعداد حقيقية وحدود متتابعة لمتتالية هندسية فإن $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)(x-y+z)$

2) عين ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية علما أن مجموعها 42 و مجموع مربعاتها 1092 .

الحل

1) x , y , z حدود متتابعة لمتتالية هندسية يعني $y^2 = x\times z$

$$(x+y+z)(x-y+z) = x^2+2xz-y^2+z^2 =$$
$$x^2+2y^2-y^2+z^2 = x^2+y^2+z^2$$

2) لدينا $x+y+z=42$ و $x^2+y^2+z^2=1092$

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)(x-y+z)=42(x-y+z)$$

ومنه $x-y+z=1092\div 42=26$ و منه :

$$(x+y+z)-(x-y+z)=2y=16$$

ومنه : $y=8$. لدينا : $x+y+z=42$ ومنه : $x+z=34$

ونعلم أن $x=\frac{y}{q}$ و $z=yq$. وبتعويض في المعادلة السابقة

نجد : $x+z=\frac{y}{q}+yq=8\left(\frac{1}{q}+q\right)=8\left(\frac{q^2+1}{q}\right)=34$

ومنه : $\frac{q^2+1}{q}=\frac{17}{4}$ ومنه : $4q^2-17q+4=0$

ومنه : $q=4$ او $q=1/4$

إذا كان $q=4$ فإن $x=2 , y=8 , z=32$

إذا كان $q=\frac{1}{4}$ فإن $x=32 , y=8 , z=2$.

تمرين 17

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية عددية حدودها موجبة معرفة كما يلي :

الخمسة الحدود الأولى تشكل متتالية حسابية حدها الأول $u_1=1$ وأساسها $r=1/2$ وبداية من الحد الرابع حدود المتتالية (u_n) تشكل متتالية هندسية أساسها $6/5$

1) أحسب u_2 , u_3 , u_4 ثم u_n بدلالة n

2- أ) أحسب $S_n=u_1+u_2+...+u_n$. ب) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

الحل

1) $u_2=u_1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\ ,\ u_3=u_2+\frac{1}{2}=2\ ,\ u_4=u_3+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

ومن أجل $n\geq 4$ فإن :

$$u_n=u_4\times q^{n-4}=\frac{5}{2}\times\left(\frac{6}{5}\right)^{n-4}=\frac{5}{2}\times\frac{6}{5}\times\left(\frac{6}{5}\right)^{n-5}=3\left(\frac{6}{5}\right)^{n-5}$$

$$S_n=(u_1+u_2+u_3)+(u_4+...+u_n)=\frac{9}{2}+(u_4+...+u_n)$$

$\left(u_4+...+u_n\right)$ تمثل مجموع $(n-3)$ حدا لمتتالية هندسية حدها الأول $u_4=5/2$ وأساسها $q=6/5$ ومنه

$$u_4+...+u_n=u_4\times\frac{q^{n-3}-1}{q-1}=\frac{25}{2}\times\left[\left(\frac{6}{5}\right)^{n-3}-1\right]$$

ومنه : $S_n=\frac{9}{2}+\frac{25}{2}\times\left[\left(\frac{6}{5}\right)^{n-3}-1\right]$

ب) $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$ (لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{6}{5}\right)^{n-3}=+\infty$).

تمرين 18

(u_n) متتالية هندسية متناقصة معرفة على $\mathbb{N}^*$ أساسها q حيث $u_1\times u_2\times u_3=\frac{125}{8}$ و $\left(u_1-\frac{5}{12}\right),u_2,u_3$ تمثل حدود متتابعة لمتتالية حسابية . 1) أحسب u_1,u_2,u_3 والأساس q للمتتالية (u_n)

2) أحسب المجموع $S_n=u_1+u_2+...+u_n$

3) أحسب الجداء $P_n=u_1\times u_2\times...\times u_n$

الحل

1) بما أن (u_n) متتالية هندسية فإن : $u_1\times u_3=(u_2)^2$ ومنه:

$u_1\times u_2\times u_3=(u_2)^3=\frac{125}{8}=\left(\frac{5}{2}\right)^3$ ومنه : $u_2=\frac{5}{2}$

ومنه : $u_1\times u_3=\frac{125}{8}\div\frac{5}{2}=\frac{25}{4}$ $(*)$

$\left(u_1-\frac{5}{12}\right),u_2,u_3$ حدود متتابعة لمتتالية حسابية فإن

$\left(u_1-\frac{5}{12}\right)+u_3=2u_2=5$ ومنه : $u_1+u_3=\frac{65}{12}$ $(**)$

من $(*)$ و $(**)$ نجد : $\begin{cases}u_1+u_3=\frac{65}{12}\\ u_1\times u_3=\frac{25}{4}\end{cases}$

ومنه :

($u_3=\frac{65}{12}-u_1$ و $u_1^2-\frac{65}{12}u_1+\frac{25}{4}=0$) ومنه :

($u_1=\frac{15}{4}$ و $u_3=\frac{5}{3}$) أو ($u_1=\frac{5}{3}$ و $u_3=\frac{15}{4}$)

وبما أن (u_n) متتالية متناقصة فيكون $u_1>u_3$

إذن : $u_1=\frac{15}{4}$, $u_2=\frac{5}{2}$, $u_3=\frac{5}{3}$

ويكون أساس المتتالية (u_n) هو $q=\frac{u_2}{u_1}=\frac{2}{3}$.

(2 $S_n=u_1+...+u_n=u_1\frac{1-(2/3)^n}{1-2/3}=\frac{45}{4}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

$$P_n = u_1 \times u_2 \times ... \times u_n = u_1 \times u_1 q \times u_1 q^2 \times ... \times u_1 q^{n-1} =$$

(3 $$= (u_1)^n \times q^{1+2+...+n-1} = \left(\frac{15}{4}\right)^n \times \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

لأن $1+2...+(n-1)$ يمثل مجموع لـ $(n-1)$ حد لمتتالية حسابية حدها الأول 1 وحدها الأخير $(n-1)$.

تمرين 19

I. (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_1 = 6$ ومجموع حدودها الستة الأولى ينقص عن مجموع حدودها الثلاثة التي تليها بـ 6 .

1) عين أساس المتتالية (u_n). 2) عين رتبة الحد الذي قيمته 302

II. (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 16$ وأساسها $q = \frac{1}{2}$.

نريد حساب مجموع 10 حدود متتابعة للمتتالية (v_n) بحيث يكون مجموعها يساوي $\frac{1023}{512}$. ما هي رتبة الحد الذي نبدأ منه ؟

الحــل

I. (1 $$(u_7 + u_8 + u_9) - (u_1 + u_2 + ... + u_6) =$$
$$= (3u_1 + 21r) - (6u_1 + 15r) = -3u_1 + 6r = 6$$

نعلم أن $u_1 = 6$ و منه : $-18 + 6r = 6$ ومنه : $r = 4$

2) لتكن p رتبة الحد الذي قيمته 302 ومنه:

$u_p = u_1 + (p-1)r = 6 + (p-1) \times 4 = 302$ ومنه $p = 75$

II. نفرض أن الحد الذي نبدأ منه هو v_p ومنه مجموع العشرة الحدود المتتابعة التي حدها الأول v_p يساوي $v_p \times \frac{1-q^{10}}{1-q}$

لدينا حسب المعطيات $v_p \times \frac{1-q^{10}}{1-q} = \frac{1023}{512}$ و $q = \frac{1}{2}$

ومنه : $v_p \times \left(\frac{2^{10}-1}{2^9}\right) = v_p \times \frac{1023}{512} = \frac{1023}{512}$

ومنه : $v_p = 1$

نعلم أن $1 = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^p = v_p$ ومنه $\left(\frac{1}{2}\right)^p = \frac{1}{16}$ ومنه $p = 4$

إذن الحد الذي نبدأ منه هو v_4 ورتبته هي الرتبة الخامسة.

تمرين 20

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام $u_n = \frac{2-n}{2}$.

1) برهن أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها .

2) لتكن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $v_n = e^{u_n}$.

برهن أن (v_n) متتالية هندسية متقاربة.

3- أ) أحسب المجموع $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

ب) أحسب الجداء $P_n = v_1 \times v_2 \times ... \times v_n$

الحـــل

1) $u_{n+1}-u_n=\frac{2-(n+1)}{2}-\frac{2-n}{2}=-\frac{1}{2}$

ومنه (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0=1$ وأساسها $r=-\frac{1}{2}$

2) $v_{n+1}=e^{u_{n+1}}=e^{\frac{2-(n+1)}{2}}=e^{\frac{2-n}{2}-\frac{1}{2}}=e^{\frac{2-n}{2}}\times e^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}\times v_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=e^{-\frac{1}{2}}$.

بما أن $-1<q<1$ فالمتتالية (v_n) متقاربة وتتقارب إلى 0

3) $S_n=u_0+u_1+...+u_n=(u_0+u_n)\times\frac{n+1}{2}=$

$=(u_0+u_0+nr)\times\left(\frac{n+1}{2}\right)=\left(2-\frac{1}{2}n\right)\times\frac{n+1}{2}$

ب) $P_n=v_0\times v_1\times...\times v_n=v_0\times(v_0q)\times...\times(v_0q^n)$

$=(v_0)^{n+1}\times q^{1+...+n}=e^{n+1}\times\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

(لأن $v_0=e^{u_0}=e$ و $1+2+3+...+n=(n+1)\times\frac{n}{2}$.

تمرين 21

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1=\frac{1}{2}$ والعلاقة

التراجعية $2nu_{n+1}=(n+1)u_n$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع $v_n=\frac{u_n}{n}$

1) برهن أن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها

2- أ) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n . ب) برهن أن (u_n) متقاربة

3) أحسب بدلالة n : $\alpha_n=v_1\times v_2\times...\times v_n$

الحـــل

1) تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا تحقق $v_{n+1}=v_n\times q$

$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{n+1}=\frac{n+1}{2n}u_n\times\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}\times\frac{u_n}{n}=\frac{1}{2}\times v_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_1=\frac{1}{2}$

2- أ) بما أن (v_n) متتالية هندسية فيكون حدها العام : $v_n=v_1q^{n-1}$

ومنه $v_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^n}$. لدينا $v_n=\frac{u_n}{n}$ ومنه $u_n=nv_n$

إذن $u_n=n\times\frac{1}{2^n}=\frac{n}{2^n}$. ب) بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}=0$

إذن المتتالية (u_n) متقاربة وتتقارب إلى 0

3)

$\alpha_n=v_1\times v_2\times...\times v_n=v_1\times v_1q\times v_1q^2\times...\times v_1q^{n-1}=$

$$= v_1^n \times q^{1+2+...+(n-1)} = \frac{1}{2^n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{n(n-1)}{2}}$$

تمرين 22

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_0 = 1$ و $(\alpha \in \mathbb{R})$ $u_n = \alpha u_{n-1} + 2$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

1- أ) عين α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة .

ب) ما طبيعة المتتالية (u_n) إذا كان $\alpha = 1$.

2) نفرض أن $\alpha \neq -1$ و $\alpha \neq 1$ ونعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$

من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - \frac{2}{1-\alpha}$

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول v_0 وأساسها q

ب) عين قيم α حتى تكون المتتالية (v_n) متقاربة ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} v_n$

الحل

1- أ) تكو ن المتتالية (u_n) ثابتة إذا تحقق لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n$

وحسب المعطيات لدينا $u_0 = 1$ ومنه المتتالية (u_n) ثابتة لما :

$u_{n+1} = u_n = u_0 = 1$ ومنه : $\alpha \times 1 + 2 = 1$ ومنه : $\alpha = -1$

ب) إذا كان $\alpha = 1$ فإن : $u_n = u_{n-1} + 2$ ومنه : $u_n - u_{n-1} = 2$

إذن المتتالية (u_n) هي متتالية حسابية أساسها 2.

2- أ) تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا كان : $v_{n+1} = v_n \times q$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{1-\alpha} = \alpha u_n + 2 - \frac{2}{1-\alpha} =$$

$$= \alpha u_n + \frac{2(1-\alpha)-2}{1-\alpha} = \alpha\left(u_n - \frac{2}{1-\alpha}\right) = \alpha \times v_n$$

إذن (v_n) هي متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 1 - \frac{2}{1-\alpha} = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$

وأساسها $q = \alpha$. ب) تكون المتتالية الهندسية (v_n) متقاربة إذا كان أساسها $\alpha \in]-1 ; 1[$ وفي هذه الحالة تكون $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

تمرين 23

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

1) برهن أن المتتالية (v_n) متزايدة تماما .

2) برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n \le 3$

3) برهن أن المتتالية (u_n) متقاربة

الحل

1) (u_n) متتالية متزايدة يعني لكل n من $\mathbb{N}$ فأن : $u_{n+1} - u_n > 0$

لنبرهن أن المتتالية (u_n) متزايدة نستعمل البرهان بالتراجع .

نعتبر في المجموعة $\mathbb{N}$ الخاصية p المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n

ب- : $p(n): \quad u_{n+1}-u_n>0$

من أجل $n=0$ لدينا $u_1-u_0=\sqrt{6}>0$. إذن $p(0)$ محققة .

لنفرض أن $p(n)$ صحيحة أي $u_{n+1}-u_n>0$ ولنبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+2}-u_{n+1}>0$.

$$u_{n+2}-u_{n+1}=\sqrt{u_{n+1}+6}-\sqrt{u_n+6}=$$

$$=\frac{(u_{n+1}+6)-(u_n+6)}{\sqrt{u_{n+1}+6}+\sqrt{u_n+6}}=\frac{u_{n+1}-u_n}{\sqrt{u_{n+1}+6}+\sqrt{u_n+6}}$$

لدينا $u_{n+1}-u_n>0$ حسب فرضية البرهان بالتراجع ومنه

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{\sqrt{u_{n+1}+6}+\sqrt{u_n+6}}>0 \quad \text{ومنه} \quad u_{n+2}-u_{n+1}>0$$

إذن $p(n+1)$ صحيحة ، ومنه الخاصية $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ($u_{n+1}-u_n>0$) ومنه المتتالية (u_n) متزايدة .

2) لكي نبرهن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n\le 3$ نستعمل البرهان بالتراجع .

لتكن $p(n)$ خاصية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n\le 3$ لكل n من $\mathbb{N}$

من اجل $n=0$ فإن $u_0=0$ ومنه $p(0)$ صحيحة

لنفرض أن $p(n)$ صحيحة أي $u_n\le 3$ ولنبرهن على صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1}\le 3$. لدينا حسبا الفرضية : $u_n\le 3$

ومنه $u_n+6\le 3+6$ ومنه $\sqrt{u_n+6}\le 3$ ومنه $u_{n+1}\le 3$

إذن $p(n+1)$ صحيحة ، ومنه $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أي : $u_n\le 3$

3) بما أن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة .

تمرين 24

نعتبر المتتالية العددية المعرفة بـ:

$$\begin{cases} u_0=\alpha \\ \forall n\in\mathbb{N} : u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{9}{4} \end{cases}$$

1) عين α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=u_n+k$ حيث k عدد حقيقي . عين قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين حدها الأول v_0 وأساسها q.

3) في ما يأتي نأخذ $k=-3$ و $\alpha=4$.

أ) أحسب v_n و u_n بدلالة n.   ب) أدرس تغيرات المتتالية (v_n)

ج) أحسب $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$.   د) أحسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$

الحل

(u_n) ثابتة يعني $u_0=u_1=...=u_n=u_{n+1}=\alpha$

لدينا $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{9}{4}$ ومنه : $\alpha=\frac{1}{4}\alpha+\frac{9}{4}$ ومنه $\alpha=3$

2) تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا تحقق: $v_{n+1}=v_n\times q$

$$v_{n+1}=u_{n+1}+k=\frac{1}{4}u_n+\frac{9}{4}+k=\frac{1}{4}\left(u_n+k\right)+\frac{3k}{4}+\frac{9}{4}$$
$$=\frac{1}{4}v_n+\left(\frac{3}{4}k+\frac{9}{4}\right)$$

تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا كان: $\frac{3k}{4}+\frac{9}{4}=0$ ومنه $k=-3$

3- أ) حسب السؤال السابق إذا كان $k=-3$ فتكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_0=\alpha-3=4-3=1$

ومنه : $v_n=v_0\times q^n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$ و $u_n=v_n+3=\frac{1}{4^n}+3$

ب) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{4^{n+1}}-\frac{1}{4^n}=\frac{1-4}{4^{n+1}}=-\frac{3}{4^{n+1}}<0$

إذن المتتالية (v_n) متناقصة .

ج) $S_n=u_0+...+u_{n-1}=\left(v_0+3\right)+...+\left(v_{n-1}+3\right)=$
$$=\left(v_0+...+v_{n-1}\right)+3n=$$
$$=v_0\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}+3n=\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)+3n$$

د) $\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty$ (لأن $\frac{1}{4^n}\to 0$ و $3n\to+\infty$ لما $n\to+\infty$)

تمرين 25

نعتبر المتتالية الحقيقية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=1$ و $u_1=2$

وبالعلاقة التراجعية : $u_{n+2}=\frac{3}{2}u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_{n+1}-u_n$

1) برهن بأن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول v_0 وأساسها q.

2- أ) أحسب v_n بدلالة n. ب) برهن أن المتتالية (v_n) متناقصة

3- أ) أحسب المجموع : $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$

ب) استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$

الحـــل

1) تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا تحقق $v_{n+1}=v_n\times q$

$$v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{3}{2}u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n-u_{n+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(u_{n+1}-u_n\right)=\frac{1}{2}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0=u_1-u_0=1$ وأساسها $\frac{1}{2}$

2- أ) $v_n=v_0q^n=\frac{1}{2^n}$

ب) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^n}=\frac{1-2}{2^{n+1}}=-\frac{1}{2^{n+1}}<0$

إذن (v_n) هي متتالية متناقصة . 3- ا) لدينا :

$$S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}=v_0\frac{1-q^n}{1-q}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

ب) نعلم أن : $v_n=u_{n+1}-u_n$ ولدينا : $S_n=v_0+...+v_{n-1}$

$$S_n=(u_1-u_0)+...+(u_n-u_{n-1})=u_n-u_0=u_n-1$$

ومنه : $u_n=S_n+1=3-\frac{1}{2^{n-1}}$ وتكون $\lim_{n\to+\infty}u_n=3$.

تمرين 26

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ :

$u_1=-1$ و $u_{n+1}=\frac{n}{2(n+1)}\times u_n+\frac{3(n+2)}{2(n+1)}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

1) باستعمال البرهان بالتراجع برهن أن لكل n من $\mathbb{N}$ فإن : $u_n\le 3$

2) أدرس تغيرات المتتالية (u_n) واستنتج أن (u_n) متقاربة .

3) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بـ : $v_n=n(3-u_n)$.

- برهن أن المتتالية (v_n) هندسية وعين حدها الأول وأساسها .

4) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n

الحـــل

1) $p(n)$ خاصية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n\le 3$

لدينا $u_1=-1\le 3$ ومنه $p(1)$ صحيحة . لنفرض أن $p(n)$ محققة أي $u_n\le 3$ ولنبرهن على صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1}\le 3$. لدينا حسبا الفرضية : $u_n\le 3$

ومنه : $\frac{n}{2(n+1)}u_n\le\frac{3n}{2(n+1)}$ ومنه :

$$\frac{n}{2(n+1)}u_n+\frac{3(n+2)}{2(n+1)}\le\frac{3n}{2(n+1)}+\frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$ ومنه :

$u_{n+1}\le\frac{6(n+1)}{2(n+1)}$ ومنه $u_{n+1}\le 3$. بما أن $p(n+1)$ محققة

فإن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم أي: $u_n\le 3$

2) $u_{n+1}-u_n=\frac{n}{2(n+1)}u_n+\frac{3(n+2)}{2(n+1)}-u_n=$

$$=\left(\frac{n}{2(n+1)}-1\right)u_n+\frac{3(n+2)}{2(n+1)}=-\frac{n+2}{2(n+1)}u_n+\frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

$$=-\frac{n+2}{2(n+1)}\times(u_n-3)>0$$

. ($u_n-3\le 0$ و $-\frac{n+2}{2(n+1)}<0$ لأن)

بما أن $u_{n+1}-u_n>0$ فالمتتالية (u_n) متزايدة وبما أنها محدودة من الأعلى بالعدد 3 فهي متقاربة

3) تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا تحقق $\forall n\in\mathbb{N}^*: v_{n+1}=v_n\times q$

$$v_{n+1}=(n+1)(3-u_{n+1})=$$

$$=(n+1)\left[3-\frac{n}{2(n+1)}u_n-\frac{3(n+2)}{2(n+1)}\right]=$$

$$=3(n+1)-\frac{n}{2}u_n-\frac{3(n+2)}{2}=\frac{6(n+1)-3(n+2)}{2}-\frac{n}{2}u_n=$$

$$=\frac{3n}{2}-\frac{n}{2}u_n=\frac{1}{2}n(3-u_n)=\frac{1}{2}v_n$$

إذن المتتالية (v_n) هندسية حدها الأول $v_1=4$ وأساسها $\frac{1}{2}$

4) $v_n=v_1q^{n-1}=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^2\times\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-3}}$

لدينا : $v_n=n(3-u_n)$ ومنه : $u_n=3-\frac{v_n}{n}=3-\frac{1}{n}\times\frac{1}{2^{n-3}}$.

تمرين 27

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$\begin{cases}3u_{n+2}-5u_{n+1}+2u_n=0\\ u_0=1\quad,\quad u_1=3\end{cases}$$

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ : $v_n=u_{n+1}-u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) برهن أن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها

2- أ) أحسب $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$

ب) أكتب S_n بدلالة u_n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

جـ) برهن بأن المتتالية (u_n) هي متتالية رتيبة .

الحـــل

1) تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا تحقق $\forall n\in\mathbb{N}: v_{n+1}=v_n\times q$

$$v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{5}{3}u_{n+1}-\frac{2}{3}u_n-u_{n+1}=\frac{2}{3}u_{n+1}-\frac{2}{3}u_n=$$

$$=\frac{2}{3}(u_{n+1}-u_n)=\frac{2}{3}v_n$$

إذن (v_n) هي متتالية هندسية حدها الأول $v_0=2$ وأساسها $\frac{2}{3}$.

2) $S_n=v_0+v_1+...+v_n=v_0\times\frac{1-q^n}{1-q}=6\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

ب) $S_n=v_0+v_1+...+v_n=(\cancel{u_1}-u_0)+...+(u_n-\cancel{u_{n-1}})$

$$S_n = u_n - u_0 = u_n - 1$$

لدينا $S_n = u_n - 1$ ومنه : $u_n = S_n + 1 = 6\left[1-\left(2/3\right)^n\right]+1$

جـ -

$$u_{n+1}-u_n = 6\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]-6\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]=$$

$$=6\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(1-\frac{2}{3}\right)=2\left(\frac{2}{3}\right)^n>0$$

بما أن $u_{n+1}-u_n>0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة (رتيبة) .

تمرين 28

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$v_0=\alpha\ (\alpha\in\mathbb{R})$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $4v_{n+1}=v_n+9$

1) عين قيمة العدد α حتى تكون المتتالية (v_n) ثابتة .

نفرض في كل ما يلي $\alpha=4$. 2) أحسب v_3 , v_2 , v_1

3) نعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $u_n=v_n-3$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ) أثبت أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .

ب) أكتب u_n ثم v_n بدلالة n .

جـ) أحسب المجموعين : $S_n = v_0+v_1+...+v_n$

$$\pi_n = u_0+4u_1+4^2u_2+...+4^nu_n$$

د) أثبت أن : $u_0\times u_1\times...\times u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n(n+1)}$

الحــل

1) تكون المتتالية (v_n) ثابتة لما جميع حدودها متساوية أي :

$v_0=v_1=...=v_n=v_{n+1}=\alpha$.

لدينا : $4v_{n+1}=v_n+9$ ومنه $4\alpha=\alpha+9$ و منه $\alpha=3$

2) لدينا : $4v_{n+1}=v_n+9$ ومنه : $v_{n+1}=\frac{1}{4}v_n+\frac{9}{4}$

$v_1=\frac{1}{4}v_0+\frac{9}{4}=1+\frac{9}{4}=\frac{13}{4}$, $v_2=\frac{1}{4}v_1+\frac{9}{4}=\frac{49}{16}$

$$v_3=\frac{1}{4}v_2+\frac{9}{4}=\frac{193}{64}$$

3- أ) تكون (u_n) متتالية هندسية إذا تحقق $u_{n+1}=u_n\times q$

$$u_{n+1}=v_{n+1}-3=\frac{1}{4}v_n+\frac{9}{4}-3=\frac{1}{4}(v_n-3)=\frac{1}{4}u_n$$

إذن (u_n) هي متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$.

ب) $u_n=u_0\times q^n=(v_0-3)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{4^n}$.

لدينا : $u_n = v_n - 3$ ومنه : $v_n = u_n + 3 = \frac{1}{4^n} + 3$

ج) $S_n = v_0 + \dots + v_n = (u_0 + 3) + \dots + (u_n + 3) =$

$= (u_0 + \dots + u_n) + 3(n+1)$

وبما أن $u_0 + \dots + u_n$ يمثل مجموع $(n+1)$ حدا لمتتالية هندسية

حدها الأول $u_0 = 1$ وأساسها $q = \frac{1}{4}$ فإن :

$$u_0 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right)$$

ومنه : $S_n = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right) + 3(n+1)$

$$\pi_n = u_0 + 4u_1 + 4^2 u_2 + \dots + 4^n u_n =$$

$$= u_0 + 4u_0 q + 4^2 u_0 q^2 + \dots + 4^n u_0 q^n =$$

$$= u_0\left[1 + 4q + (4q)^2 + \dots + (4q)^n\right] =$$

$$= u_0(1 + 1 + 1 + \dots + 1) = (n+1)$$

(لأن $u_0 = 1$ و $4q = 4 \times \frac{1}{4} = 1$)

د) $u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n = u_0 \times (u_0 q) \times \dots \times (u_0 q^n) =$

$$= q^{1+\dots+n} = q^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n(n+1)}$$

لأن $u_0 = 1$ و $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$).

تمرين 29

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة كما يلي :

$u_0 = 3$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 2n + \frac{5}{3}$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) أحسب u_1, u_2, u_3 . 2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$v_n = u_n + \alpha n + \beta$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$ حيث α, β عددان

2) عين العددين α, β بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$

3) نفرض أن في ما يأتي $\alpha = 6$ و $\beta = -23$.

أ) أكتب عبارة v_n ثم u_n بدلالة n .

ب) نضع : $\pi_n = u_0 + \dots + u_n$, $S_n = v_0 + \dots + v_n$

أحسب S_n بدلالة n ثم استنتج عبارة π_n.

الحل

1) $u_1 = \frac{2}{3}u_0 + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$, $u_2 = \frac{19}{9}$, $u_3 = \frac{-45}{27}$

2) (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ يعني : $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = \frac{2}{3} v_n$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = \frac{2}{3}u_n - 2n + \frac{5}{3} + \alpha(n+1) + \beta$$
$$= \frac{2}{3}u_n - 2n + \frac{5}{3} + \alpha n + \alpha + \beta$$
$$= \frac{2}{3}(u_n + \alpha n + \beta) + \frac{1}{3}\alpha n + \frac{1}{3}\beta + \alpha - 2n + \frac{5}{3}$$
$$= \frac{2}{3}v_n + \left(\frac{\alpha}{3} - 2\right)n + \frac{1}{3}\beta + \alpha + \frac{5}{3}$$

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ يجب أن :

$$\left(\frac{\alpha}{3} - 2\right)n + \frac{1}{3}\beta + \alpha + \frac{5}{3} = 0$$

ومنه : $\begin{cases} \frac{\alpha}{3} - 2 = 0 \\ \frac{1}{3}\beta + \alpha + \frac{5}{3} = 0 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = -23 \end{cases}$

3- أ) إذا كان $\alpha = 6$ و $\beta = -23$ فإن (v_n) متتالية هندسية (سؤال سابق) حدها الأول $v_0 = u_0 + \beta = -20$ وأساسها $\frac{2}{3}$

$v_n = v_0 \times q^n = (-20)\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$. لدينا : $v_n = u_n + 6n - 23$

ومنه : $u_n = v_n - 6n + 23 = (-20)\left(\frac{2}{3}\right)^n - 6n + 23$

ب) $S_n = v_0 + \ldots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

$$S_n = (-60)\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$\pi_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n =$$
$$= (v_0 + 23) + (v_1 - 6 + 23) + \ldots + (v_n - 6n + 23)$$
$$= (v_0 + v_1 + \ldots + v_n) + (23 + 17 + 11 + \ldots + (23 - 6n))$$

$23 + 17 + 11 + \ldots + (23 - 6n)$ يمثل مجموع لـ $(n+1)$ حدا لمتتالية حسابية حدها الأول23 و حدها الأخير $(23 - 6n)$ ومنه :

$$23 + 17 + \ldots + (23 - 6n) = [23 + (23 - 6n)] \times \frac{n+1}{2} =$$
$$= (23 - 3n)(n+1)$$

$$\pi_n = S_n + (23 - 3n)(n+1) =$$
$$= -60\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + (23 - 3n)(n+1)$$

تمرين 30

(v_n) متتالية عددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $v_0=-\frac{1}{2}$

والعلاقة التراجعية : $v_{n+1}=\frac{9v_n-8}{2v_n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $v_n\neq 2$

2) (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n=\frac{2v_n+1}{v_n-2}$

أ) بين أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها.

ب) أحسب u_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n.

جـ) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. ماذا نستنتج ؟

3) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=u_1+u_3+u_5+...+u_{2n+1}$

الحـل

1) لنبرهن أن $v_n\neq 2$: $\forall n\in\mathbb{N}$ نستعمل البرهان بالتراجع.

لتكن الخاصية $p(n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n\neq 2$.

لدينا $v_0=-\frac{1}{2}\neq 2$ إذن $p(0)$ محققة .

لنفرض أن $p(n)$ صحيحة $(v_n\neq 2)$ ولنبرهن على صحة

$p(n+1)$ أي $(v_{n+1}\neq 2)$ وهذا يعني نبرهن صحة الاستلزام :

$v_n\neq 2$ تستلزم $v_{n+1}\neq 2$. ونعلم أن :

$(v_n\neq 2$ تستلزم $v_{n+1}\neq 2)$ يكافئ $(v_{n+1}=2$ تستلزم $v_n=2)$

$v_{n+1}=\frac{9v_n-8}{2v_n+1}=2$ ومنه $9v_n-8=2(2v_n+1)$ ومنه $v_n=2$

بما أن $p(n)$ تستلزم $p(n+1)$ فإن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n $(v_n\neq 2)$

2- أ) (u_n) متتالية حسابية يعني : $u_{n+1}-u_n=r$ لكل n من $\mathbb{N}$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2v_{n+1}+1}{v_{n+1}-2}-\frac{2v_n+1}{v_n-2}=$$

$$\frac{2\times\frac{9v_n-8}{2v_n+1}+1}{\frac{9v_n-8}{2v_n+1}-2}-\frac{2v_n+1}{v_n-2}=$$

$$=\frac{20v_n-15}{5v_n-10}-\frac{2v_n+1}{v_n-2}=\frac{2v_n-4}{v_n-2}=\frac{2(v_n-2)}{v_n-2}=2$$

إذن (u_n) متتالية حسابية أساسها 2 وحدها الأول 0 $u_0=0$

ب) $u_n=u_0+nr=2n$. لدينا : $u_n=\frac{2v_n+1}{v_n-2}$ ومنه :

$v_n(u_n-2)=2u_n+1$ ومنه : $v_n=\frac{2u_n+1}{u_n-2}=\frac{4n+1}{2n-2}$

جـ) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} 2n=+\infty$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n+1}{2n-2}=2$

نستنتج أن المتتالية (v_n) متقاربة وأن المتتالية (u_n) متباعدة

2) لدينا $u_n = 2n$ ومنه :

$= 2 , u_3 = 6 , u_5 = 10 ,..., u_{2n+1} = 2(2n+1) = 4n+2$

نلاحظ أن $2 , 6 , 10 , 14 ,..., 2(2n-1) , 2(2n+1)$ هي

تمثل $(n+1)$ حدا متتابعا لمتتالية حسابية حدها الأول 2

وحدها الأخير $u_{2n+1} = 4n+2$ وأساسها $r = 4$ ومنه :

$$S_n = u_1 + ... + u_{2n+1} = (u_1 + u_{2n+1})\left(\frac{n+1}{2}\right) =$$

$$= (4n+4)\left(\frac{n+1}{2}\right) = 2(n+1)^2$$

تمرين 31

(v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_0 = 0$ والعلاقة التراجعية :

$\forall n \in \mathbb{N}: 2v_n = \alpha v_{n-1} + 2(\alpha - 2)$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.

1) عين α حتى تكون المتتالية (v_n) ثابتة .

2) نفرض أن $\alpha \ge 2$. أ) برهن ان $\forall n \in \mathbb{N}: v_n \ge 0$

ب) برهن أن المتتالية (v_n) متزايدة .

3) نفرض أن $\alpha \in \mathbb{R} - \{2\}$ ونعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n = 2(2 + v_n)$.

أ) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها .

ب) أحسب v_n بدلالة n و α.

جـ) عين قيم α حتى تكون (v_n) متقاربة

الحل

(v_n) ثابتة يعني : $v_0 = v_1 = ... = v_{n-1} = v_n$.

لدينا : $2v_n = \alpha v_{n-1} + 2(\alpha - 2)$ ومنه تكون (v_n) ثابتة إذا كان

$2v_0 = \alpha v_0 + 2(\alpha - 2)$ ومنه : $0 = 2(\alpha - 2)$ ومنه $\alpha = 2$

2- أ) لنبرهن أن $\forall n \in \mathbb{N}: v_n \ge 0$ نستعمل البرهان بالتراجع .

لدينا $v_0 = 0$ ومنه $p(0)$ محققة . نفرض أن $p(n)$ صحيحة

$(v_n \ge 0)$ ولنبرهن على صحة $p(n+1)$ $(v_{n+1} \ge 0)$.

لدينا $v_n \ge 0$ (حسب الفرضية) و $v_{n+1} = \frac{\alpha}{2}v_n + (\alpha - 2)$.

$v_n \ge 0$ ومنه $\frac{\alpha}{2}v_n \ge 0$ ومنه $\frac{\alpha}{2}v_n + (\alpha - 2) \ge 0$ (لأن $\alpha \ge 2$)

أي $v_{n+1} \ge 0$.

بما أن $p(n+1)$ صحيحة فإن $p(n)$ صحيحة من أجل

كل عدد طبيعي n أي $v_n \ge 0$.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{\alpha}{2}v_n + (\alpha - 2) - v_n = \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right)v_n + (\alpha - 2) =$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha - 2)v_n + (\alpha - 2) = (\alpha - 2)\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right) \ge 0$$

(لأن $\alpha \ge 2$ و $v_n \ge 0$) . بما أن $v_{n+1} - v_n \ge 0$ فإن (v_n) متزايدة

3-أ) تكون (u_n) متتالية هندسية إذا تحقق $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n q$

$$u_{n+1} = 2(2+v_{n+1}) = 2\left(2+\frac{\alpha}{2}v_n+\alpha-2\right) = 2\left(\frac{\alpha}{2}v_n+\alpha\right) =$$
$$= \frac{\alpha}{2}\times 2(v_n+2) = \frac{\alpha}{2}u_n$$

إذن (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0 = 4$ وأساسها $q = \frac{\alpha}{2}$

ب) $u_n = u_0 q^n = 4\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n$. لدينا $u_n = 2(2+v_n)$

ومنه : $v_n = \frac{1}{2}u_n - 2 = 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n - 2$

جـ) تكون (v_n) متتالية متقاربة إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lambda \ (\lambda \in \mathbb{R})$.

تكون (v_n) متقاربة إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n = 0$ وهذا يعني : $\left|\frac{\alpha}{2}\right| < 1$

$\left|\frac{\alpha}{2}\right| < 1$ يكافئ $-1 < \frac{\alpha}{2} < 1$ يكافئ $-2 < \alpha < 2$

إذا كان $\alpha \in]-2\,;2[$ فالمتتالية (v_n) متقاربة وتتقارب نحو (2-)

تمرين 32

1) أحسب المجموع $s = 1+7+13+\ldots+(6n+1)$

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$v_0 = 2$ والعلاقة التراجعية : $\forall \in \mathbb{N}: v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 3n + \frac{13}{2}$.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = v_n - 6n - 1$

أ) أوجد العلاقة التي تربط بين u_{n+1} و u_n

ب) عبر عن u_n ثم v_n بدلالة n

جـ) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

3) أحسب $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ و $\pi_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

الحل

1) $1\ ,\ 7\ ,\ 13\ ,\ldots,\ (6n+1)$ هي حدود متتابعة لمتتالية حسابية حدها الأول1 و أساسها $r = 6$ وحدها العام $u_n = 6n+1$.

إذا استبدلنا في عبارة الحد العام n بالقيم $\{0,1,2,3,\ldots,n\}$ نحصل على $(n+1)$ حدا متتابعا ومنه :

$$s = 1+7+13+\ldots+(6n+1) = [1+(6n+1)]\times(n+1)/2 =$$
$$= (3n+1)(n+1)$$

(2

$$u_{n+1} = v_{n+1} - 6(n+1) - 1 = \frac{1}{2}v_n + 3n + \frac{13}{2} - 6n - 7 =$$
$$= \frac{1}{2}v_n - 3n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(v_n - 6n - 1) = \frac{1}{2}u_n$$

ب) لدينا $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n$ ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $u_0=v_0-1=1$. ومنه $u_n=u_0q^n=\frac{1}{2^n}$.

لدينا $u_n=v_n-6n-1$ ومنه $v_n=u_n+6n+1=\frac{1}{2^n}+6n+1$

ج) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$

3) $$S_n=u_0+\dots+u_n=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$\pi_n=v_0+v_1+\dots+v_n=$$
$$=(u_0+1)+(u_1+7)+\dots+(u_n+6n+1)=$$
$$=(u_0+u_1+\dots+u_n)+(1+7+\dots+6n+1)=$$
$$=2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)+(3n+1)(n+1)$$

تمرين 33

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=1$ و بالعلاقة : $\forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1}=\alpha(u_n-2)$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}^*$.

1) عين العدد الحقيقي α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة .

2) نضع $\alpha=\frac{2}{3}$.

أ) بين أن $\forall n\in\mathbb{N}: u_n\ge-4$.   ب) بين أن (u_n) متتالية متناقصة

3) (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\forall n\in\mathbb{N}: v_n=u_n+4$

عين α حتى تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول v_0 وأساسها q .

4) نفرض أن $\alpha=\frac{2}{3}$.   أ) أحسب $S_n=u_0+u_1+\dots+u_n$

ب) $P_n=(v_0)^3+(v_1)^3+\dots+(v_n)^3$

الحل

1) (u_n) ثابتة يعني : $u_n=u_{n+1}$.   لدينا $u_{n+1}=\alpha(u_n-2)$

تكون (u_n) ثابتة لما $1=\alpha(1-2)$ ومنه $\alpha=-1$

2- أ) لنبرهن أن $\forall n\in\mathbb{N}: u_n\ge-4$ نستعمل البرهان بالتراجع .

لدينا : $u_0=1\ge-4$ ومنه $p(0)$ محققة .

لنفرض أن $p(n)$ صحيحة أي $u_n\ge-4$ ولنبرهن على صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1}\ge-4$.   لدينا فرضا $u_n\ge-4$ ومنه :

$u_n-2\ge-6$ ومنه $\frac{2}{3}(u_n-2)\ge-6\times\frac{2}{3}$ ومنه $u_{n+1}\ge-4$

إذن $p(n+1)$ صحيحة ومنه $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أي : $u_n\ge-4$ $(u_n+4\ge0)$

ب) $u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}(u_n-2)-u_n=-\frac{1}{3}(u_n+4)\le 0$

بما أن $u_{n+1}-u_n\le 0$ فالمتتالية (u_n) متناقصة

3) تكون (v_n) متتالية هندسية إذا تحقق $\forall n\in\mathbb{N}: v_{n+1}=v_n\times q$

$$v_{n+1}=u_{n+1}+4=\alpha(u_n-2)+4=\alpha(u_n+4)-6\alpha+4=$$
$$=\alpha\times v_n-6\alpha+4$$

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يجب أن : $4-6\alpha=0$ ومنه $\alpha=\frac{2}{3}$

لما $\alpha=\frac{2}{3}$ فالمتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0=5$

4) لدينا $\alpha=\frac{2}{3}$ ومنه (v_n) متتالية هندسية.

أ-

$$S_n=u_0+u_1+...+u_n=(v_0-4)+(v_1-4)+...+(v_n-4)=$$
$$=(v_0+v_1+...+v_n)-4(n+1)=v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=$$
$$=15\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]-4(n+1)$$

ب-

$$P_n=(v_0)^3+(v_1)^3+...+(v_n)^3=$$
$$=(v_0)^3+(v_0q)^3+...+(v_0q^n)^3=(v_0)^3(1+q^3+...+q^{3n})$$

نعلم أن $1+q^3+q^6+...+q^{3n}$ يمثل مجموع لـ $(n+1)$ حدا متتابعا لمتتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها $q^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

$$1+q^3+q^6+...+q^{3n}=\frac{1-\left(\frac{8}{27}\right)^{n+1}}{1-\frac{8}{27}}=\frac{27}{19}\left[1-\left(\frac{8}{27}\right)^{n+1}\right]$$

$$P_n=125\times\frac{27}{19}\left[1-\left(\frac{8}{27}\right)^{n+1}\right]$$

تمرين34

في السنة 1995 صنع معمل 2000 دراجة ، نفرض أن عدد الدرجات المصنوعة في هذا المعمل يزداد كل عام بنسبة 5%.

1) ما هو عدد الدراجات الذي سيصنعها هذا المعمل في سنة 2000.

2) في أي سنة يكون عدد الدراجات المصنوعة من طرف هذا المصنع أكبر من 50000 دراجة ؟

الحل

1) لنرمز بـ u_0 إلى عدد الدراجات التي صنعت في سنة 1995 أي: $u_0=20000$ (دراجة) . و بعد سنة (سنة 1996) يكون عدد الدراجات التي يصنعها هذا المعمل : $u_1=u_0+0,05u_0=1,05u_0$

في سنة 1997 يكون عدد الدراجات : $u_2=u_1+0,05u_1=1,05u_1$.

وفي سنة1998يكون عدد الدراجات: $u_3 = u_2 + 0,05u_2 = 1,05u_2$.

وفي سنة$(1995+n)$يكون : $u_n = u_{n-1} + 0,05u_{n-1} = 1,05u_{n-1}$.

إذن عدد الدراجات المصنوعة في هذا المعمل يمثل حدود متتالية هندسية حدها الأول $u_0 = 20000$ وأساسها $q = 1,05$.

عدد الدراجات التي يصنعها هذا المعمل في سنة 2000 هو :

$$u_5 = u_0 \times q^5 = 20000\times(1,05)^5 = 25524$$

2) نعلم أن عدد الدراجات التي يصنعها هذا المعمل بعد n سنة هو: $u_n = u_0\times q^n = 20000\times(1,05)^n$. إذن عدد السنوات التي يكون فيها الإنتاج أكبر من50000هو الحل للمتراجحة :

$20000\times(1,05)^n > 50000$ ومنه $(1,05)^n > 2,5$

باستعمال اللوغارتم النبيري نحصل على : $n\ln 1,05 > \ln 2,5$

ومنه : $0,048\times n > 0,916$ ومنه : $n > 19,08$

إذن $n = 20$ في سنة $(1995+20)$ أي سنة 2015.

تمرين 35

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 2$ والعلاقة : $u_n - 2u_{n+1} = 2n+3$. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\forall n\in\mathbb{N}: v_n = u_n + \alpha n - 1 \quad (\alpha\in\mathbb{R})$

1) عين العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول v_0 وأساسها q . في كل ما يأتي نفرض $\alpha = 2$

2) استنتج أن : $v_n = \frac{1}{2^n} - 2n + 1$

3) نضع : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$. أحسب S_n و $\lim_{n\to+\infty} S_n$

الحل

1) تكون (v_n) متتالية هندسية إذا تحقق $\forall n\in\mathbb{N}: v_{n+1} = v_n q$

لدينا : $u_n - 2u_{n+1} = 2n+3$ ومنه : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - n - \frac{3}{2}$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha(n+1) - 1 =$$

$$= \frac{1}{2}u_n - n - \frac{3}{2} + \alpha(n+1) - 1 =$$

$$= \frac{1}{2}(u_n + \alpha n - 1) + \frac{1}{2}\alpha n - n + \alpha - 2 =$$

$$= \frac{1}{2}v_n + \left(\frac{1}{2}\alpha n - n + \alpha - 2\right)$$

تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا كان : $\frac{1}{2}\alpha n - n + \alpha - 2 = 0$

$\frac{1}{2}\alpha n - n + \alpha - 2 = 0$ ومنه : $\frac{n}{2}(\alpha - 2) + (\alpha - 2) = 0$

ومنه $\left(\frac{n}{2}+1\right)(\alpha - 2) = 0$ و منه $\alpha - 2 = 0$ ومنه: $\alpha = 2$

تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا كان $\alpha = 2$ ويكون حدها الأول

وأساسها $q=\frac{1}{2}$. $v_0=u_0-1=1$

2) لما $\alpha=2$ فالمتتالية (v_n) هندسية ويكون $v_n=v_0q^n=\frac{1}{2^n}$

لدينا : $v_n=u_n+2n-1$ ومنه : $u_n=v_n-2n+1$

إذن : $u_n=\frac{1}{2^n}-2n+1$.

3) $$S_n=v_0+v_1+...+v_n=v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=2$$ (لأن $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=0$)

تمرين 36

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $\forall n\in\mathbb{N}: u_n=\int_n^{n+1}e^{-x+1}dx$

1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n>0$

2) – أ) أحسب u_n بدلالة n .

ب) استنتج أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول u_0 وأساسها q.

3) نضع $S_n=u_0+u_1+...+u_n$.

أ) أحسب S_n بدلالة n . ب) بين أن $S_n=\int_0^{n+1}e^{-x+1}dx$

الحل

1) نعلم إذا كان $f(x)>0$ لما $x\in[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx>0$.

بما أن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $e^{-x+1}>0$ فإن :

$\int_n^{n+1}f(x)dx>0$ ومنه $u_n>0$ من أجل كل عدد طبيعي n

2- أ) لدينا $\int e^{ax+b}dx=\frac{1}{a}e^{ax+b}+c$ ومنه

$$u_n=\int_n^{n+1}e^{-x+1}dx=\left[-e^{-x+1}\right]_n^{n+1}=-e^{-(n+1)+1}+e^{-n+1}=$$

$$=-e^{-n}+e^{-n+1}=-e^{-n}+e\times e^{-n}=(e-1)e^{-n}$$

ب) $u_{n+1}=(e-1)e^{-(n+1)}=e^{-1}(e-1)e^{-n}=e^{-1}\times u_n$

بما أن $u_{n+1}=\frac{1}{e}u_n$ فإن (u_n) متتالية هندسية حدها

الأول $u_0=e-1$ وأساسها $q=\frac{1}{e}$.

$$S_n=u_0+u_1+...+u_n=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=(e-1)\frac{1-\left(e^{-1}\right)^{n+1}}{1-e^{-1}}=$$

$$=(e-1)\times\frac{e}{e-1}\times\left(1-e^{-(n+1)}\right)=e\left(1-e^{-(n+1)}\right)$$

ب) $S_n = u_0 + ... + u_n = \int_0^1 e^{-x+1}dx + ... + \int_n^{n+1} e^{-x+1}dx$

نعلم أن إذا كانت الدالة f مستمرة على المجال $[a;k]$ فإن :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^k f(x)dx = \int_a^k f(x)dx$$

$$S_n = \int_0^1 e^{-x+1}dx + \int_1^2 e^{-x+1}dx + ... + \int_n^{n+1} e^{-x+1}dx = \int_0^{n+1} e^{-x+1}dx$$

تمرين 37

لتكن المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 5/3$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم : $\alpha u_n = 3u_{n-1} + 2$ حيث $\alpha \in \mathbb{R} - \{0,3\}$

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي بـ : $v_n = u_n - \frac{2}{\alpha - 3}$.

1- أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها بدلالة α.

ب) عين α حتى تكون (v_n) متقاربة .

نفرض أن $\alpha = 6$. أ) عين عبارة v_n ثم u_n بدلالة n .

ب) أحسب المجموع $S_n = u_0 + ... + u_n$

جـ) أحسب $\pi_n = (v_0 + 1) + (v_1 + 2) + ... + (v_n + 2^n)$

الحل

1- أ) تكون (v_n) متتالية هندسية إذا وجد عدد q بحيث $v_{n+1} = v_n q$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{\alpha - 3} = \frac{3}{\alpha}u_n + \frac{2}{\alpha} - \frac{2}{\alpha - 3} =$$

$$= \frac{3}{\alpha}u_n + \frac{2(\alpha - 3) - 2\alpha}{\alpha(\alpha - 3)} = \frac{3}{\alpha}u_n - \frac{6}{\alpha(\alpha - 3)} =$$

$$= \frac{3}{\alpha}\left(u_n - \frac{2}{\alpha - 3}\right) = \frac{3}{\alpha}v_n$$

إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{\alpha}$ وحدها الأول

$$v_0 = u_0 - \frac{2}{\alpha - 3} = \frac{5}{3} - \frac{2}{\alpha - 3} = \frac{5\alpha - 21}{3(\alpha - 3)}$$

ب) تكون المتتالية الهندسية متقاربة إذا كان $-1 < q < 1$

ومنه (v_n) متقاربة إذا وفقط $-1 < 3/\alpha < 1$ ومنه :

$-1 < \frac{3}{\alpha} < 1$ يكافئ ($\frac{3}{\alpha} > -1$ و $\frac{3}{\alpha} < 1$) أي :

($\frac{3+\alpha}{\alpha} > 0$ و $\frac{3-\alpha}{\alpha} < 0$) ومنه :

$\alpha \in]-\infty;-3[\cup]0;+\infty[$ و $\alpha \in]-\infty;0[\cup]3;+\infty[$

إذن : $\alpha \in]-\infty;-3[\cup]3;+\infty[$

2- أ) لما $\alpha = 6$ فإن $v_0 = 1$ و $q = \frac{1}{2}$ إذن : $v_n = v_0 q^n = \frac{1}{2^n}$

لدينا $v_n = u_n - \frac{2}{3}$ ومنه : $u_n = v_n + \frac{2}{3} = \frac{1}{2^n} + \frac{2}{3}$

ب) $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n =$

$$= \left(v_0 + \frac{2}{3}\right) + \left(v_1 + \frac{2}{3}\right) + \dots + \left(v_n + \frac{2}{3}\right)$$

$$= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + \frac{2}{3}(n+1) = v_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{2}{3}(n+1)$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + \frac{2}{3}(n+1)$$

جـ -

$$\pi_n = (v_0 + 1) + (v_1 + 2) + (v_2 + 2^2) + \dots + (v_n + 2^n) =$$

$$= (v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n) + (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n) =$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + 2^{n+1} - 1 = 2^{n+1} - \frac{1}{2^n} + 1$$

لأن $1 + 2 + \dots + 2^n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$ وهي تمثل مجموع

لـ $(n+1)$ حدا متتابعا لمتتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها 2

تمرين 38

نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in \mathbb{N}}$ المعرفتين كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 2 \\ 2u_{n+1} - 3u_n + u_{n-1} = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

1) أحسب u_2 و u_3 ثم v_0 و v_1.

2- أ) أثبت أن (v_n) ثابتة وحدد قيمة v_n. ب) استنتج u_{n+1} بدلالة u_n

3) لتكن المتتالية (p_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $p_n = u_n - 3$

أ) بين أن (p_n) هي متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول .

ب) أحسب p_n و u_n بدلالة n . جـ) أحسب بدلالة n كل من :

$S_1 = p_0 + \dots + p_n$ ، $S_2 = u_0 + \dots + u_n$ ،

$\pi = p_0 \times \dots \times p_n$

الحل

1) لدينا : $2u_{n+1} - 3u_n + u_{n-1} = 0$ ومنه : $u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - \frac{1}{2}u_{n-1}$

$u_2 = \frac{3}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{5}{2}$ ، $u_3 = \frac{3}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_1 = \frac{11}{4}$

$v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{3}{2}$ ، $v_1 = u_2 - \frac{1}{2}u_1 = \frac{3}{2}$

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = \frac{3}{2}u_n - \frac{1}{2}u_{n-1} - \frac{1}{2}u_n = u_n - \frac{1}{2}u_{n-1} = v_{n-1}$$

2) أ- بما أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $v_n = v_{n-1}$ فالمتتالية (v_n) ثابتة

ومنه $v_0 = v_1 = ... = v_n = \frac{3}{2}$. ب) لدينا $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

ومنه : $u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = \frac{3}{2}$ معناه : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2}$

3- أ) تكون (p_n) متتالية هندسية إذا وجد عدد q بحيث $p_{n+1} = p_n q$

$p_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2} - 3 = \frac{1}{2}(u_n - 3) = \frac{1}{2}p_n$.

بما أن $p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n$ فالمتتالية (p_n) هي هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $p_0 = -2$. ب) $p_n = p_0 \times q^n = -2 \times \frac{1}{2^n} = -\frac{1}{2^{n-1}}$

لدينا $p_n = u_n - 3$ ومنه : $u_n = p_n + 3 = -\frac{1}{2^{n-1}} + 3$.

جـ) $S_1 = p_0 + ... + p_n = p_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = -4\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

$S_2 = u_0 + ... + u_n = (p_0 + 3) + ... + (p_n + 3) =$

$= (p_0 + ... + p_n) + 3(n+1) = -4\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + 3(n+1)$

$\pi = p_0 \times p_1 \times ... \times p_n =$

$= p_0 \times (p_0 q) \times ... \times (p_0 q^n) = (p_0)^{n+1} \times q \times q^2 \times ... \times q^n =$

$= p_0^{n+1} \times q^{1+2...+n} = (p_0)^{n+1} \times q^{\frac{n(n+1)}{2}} = (-2)^{n+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

تمرين 39

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_1 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة التراجعية : $3v_{n+1} - 2v_n = 3$.

1) أحسب v_2 , v_3 , v_4 بدلالة α

2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n = v_n - 3$

أ) أحسب u_1 وبين أن $3u_{n+1} - 2u_n = 0$. ماذا نستنتج ؟

ب) أحسب u_n ثم v_n بدلالة α و n .

3) أحسب $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ ، $S'_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$

4) $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية عددية معرفة بـ : $p_n = v_n + \alpha$

ا) عين العدد الحقيقي α حتى تكون (p_n) متتالية هندسية .

ب) نفرض أن $\alpha = -3$. أحسب : $\pi_n = u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2$

الحل

1) لدينا $3v_{n+1} - 2v_n = 3$ ومنه : $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + 1$ إذن :

$v_2 = \frac{2}{3}\alpha + 1$ ، $v_3 = \frac{4}{9}\alpha + \frac{5}{3}$ ، $v_4 = \frac{8}{27}\alpha + \frac{19}{9}$

2- أ) $u_1 = v_1 - 3 = \alpha - 3$

لدينا : $u_{n+1} = v_{n+1} - 3$ و $v_{n+1} = \frac{2}{3} v_n + 1$ ومنه :

$$3u_{n+1} - 2u_n = 3\left(v_{n+1} - 3\right) - 2\left(v_n - 3\right) =$$

$$= 3\left(\frac{2}{3}v_n - 2\right) - 2v_n + 6 = 2v_n - 6 - 2v_n + 6 = 0$$

بماأن $3u_{n+1} - 2u_n = 0$ أي $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n$ فا لمتتالية (u_n)

هندسية حدها ألأول u_1 وأساسها $q = \frac{2}{3}$

ب- $u_n = u_1 q^{n-1} = (\alpha - 3)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$. لدينا $u_n = v_n - 3$

ومنه : $v_n = u_n + 3 = (\alpha - 3)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 3$

3) $S_n = u_1 + \ldots + u_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q} =$

$$= 3(\alpha - 3)\times\left[1 - \left(\tfrac{2}{3}\right)^n\right]$$

$$S'_n = v_1 + \ldots + v_n = \left(u_1 + 3\right) + \ldots + \left(u_n + 3\right) =$$

$$= \left(u_1 + u_2 + \ldots + u_n\right) + 3n = S_n + 3n =$$

$$= 3(\alpha - 3)\times\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] + 3n$$

4) تكون المتتالية (p_n) هندسية إذاوجد عدد q بحيث $p_{n+1} = p_n \times q$

$$p_{n+1} = v_{n+1} + \alpha = \frac{2}{3}v_n + 1 + \alpha = \frac{2}{3}\left(v_n + \alpha\right) + \frac{1}{3}\alpha + 1 =$$

$$= \frac{2}{3}p_n + \left(\frac{1}{3}\alpha + 1\right)$$

تكون (p_n) متتالية هندسية إذا كان $\frac{1}{3}\alpha + 1 = 0$ أي : $\alpha = -3$

من أجل $\alpha = -3$ المتتالية (p_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها

الأول $p_1 = v_1 + \alpha = 2\alpha = -6$

$$\pi_n = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = u_1^2 + \left(u_1 q\right)^2 + \ldots + \left(u_1 q^{n-1}\right)^2 =$$

$$= u_1^2\left(1 + q^2 + q^4 + \ldots + q^{2(n-1)}\right)$$

$$= 36\left(1 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^4 + \ldots + \left(\tfrac{2}{3}\right)^{2(n-1)}\right)$$

$$\left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2(n-1)}\right)$$

هومجموع لـ n حدا متتابعا لمتتالية هندسية حدهاالأول 1

وأساسها $\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ إذن:

$$1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+...+\left(\frac{2}{3}\right)^{2(n-1)}=\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}=\frac{9}{5}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$$

إذن : $\pi_n=36\times\frac{9}{5}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$.

تمرين 40

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n

بـ : $u_{n+2}=\frac{1}{2}a^2u_{n+1}+(a-3)u_n$ حيث a عدد حقيقي .

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_{n+1}-u_n$.

1) نضع $a=2$.

أ) تحقق بأن المتتالية (v_n) ثابتة .

ب) استنتج أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين اساسها وحدها لأول.

جـ) عبر بدلالة n عن u_n و $S_n=u_0+...+u_n$.

د) استنتج مجموع ألأعدادالفردية الأصغر من 100

2) نضع $a=-4$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب إعطاء حدها العام

ب) أحسب $S'_n=v_0+v_1+...+v_n$

جـ) برهن أن $S'_n=u_{n+1}-1$ واستنتج أن المتتالية (u_n) متباعدة .

الحـــل

1) تكون المتتالية (v_n) ثابتة إذاكان من أجل كل عدد طبيعي n

يكون لدينا : $v_{n+1}=v_n$. إذا كان $a=2$ فإن :

$$v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{1}{2}a^2u_{n+1}+(a-3)u_n-u_{n+1}=$$

$$=\frac{1}{2}(2)^2u_{n+1}+(2-3)u_n-u_{n+1}=u_{n+1}-u_n=v_n$$

بماأن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $v_{n+1}=v_n$ فالمتتالية (v_n) هي متتالية ثابتة $v_n=v_0=u_1-u_0=2$

ب) لدينا $u_{n+1}-u_n=v_n=2$ حسب التعريف فالمتتالية (u_n) هي متتالية حسابية حدها الأول $u_0=1$ واساسها 2.

ج) $u_n=u_0+nr=1+2n$.

د) لدينا $u_n=1+2n$ وهو يمثل عدد فردي ؛

$u_0=1$, $u_1=3$, $u_2=5$,..., $u_n=1+2n$ نلاحظ أن

حدود (u_n) هي الأعداد الطبيعية الفردية والمتتابعة

نعلم أن $u_{49}=1+2\times49=99$ ، ويكون مجموع ألأعداد الفردية الأصغر من100 هو :

$$1+3+...+99=u_0+u_1+...+u_{49}=(u_0+u_{49})\times\frac{50}{2}=$$

$$=(1+99)\times25=100\times25=2500$$

2- أ) إذا كان $a=-4$ فإن : $u_{n+2}=8u_{n+1}-7u_n$

تكون (v_n) متتالية هندسية إذاوجد عدد q بحيث $v_{n+1} = v_n q$

$${}_{1} = u_{n+2} - u_{n+1} = 8u_{n+1} - 7u_n - u_{n+1} = 7\left(u_{n+1} - u_n\right) = 7v_n$$

بماأن $v_{n+1} = 7v_n$ فالمتتالية (v_n) هي متتالية هندسية أساسها 7

وحدها الأول $v_0 = u_1 - u_0 = 2$ وحدها العام $v_n = v_0 q^n = 2 \times 7^n$

ب) $S'_n = v_0 + \ldots + v_n = 2 \times \dfrac{7^{n+1} - 1}{7 - 1} = \dfrac{1}{3}\left(7^{n+1} - 1\right)$

جـ) ولدينا أيضا :

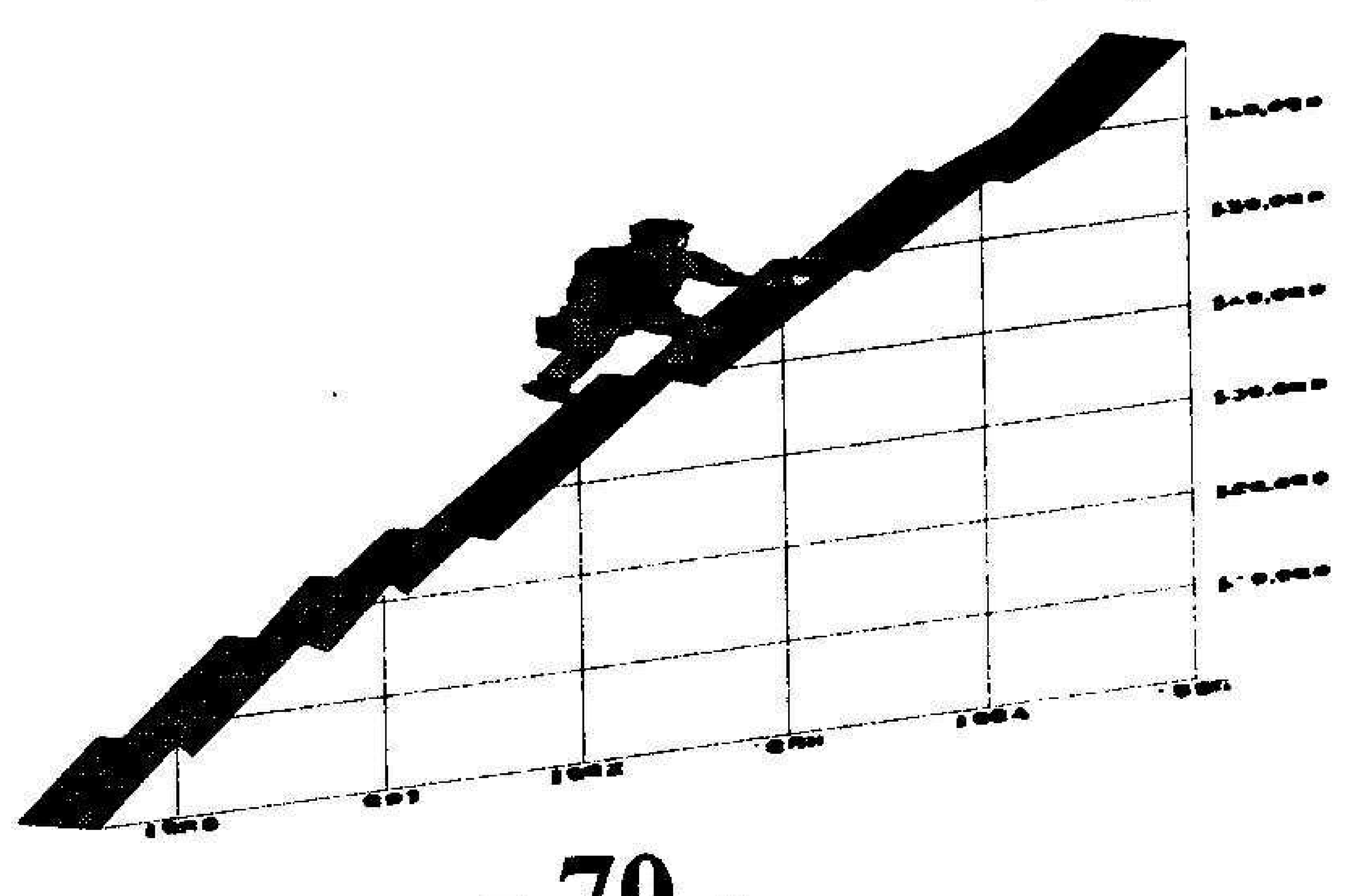
$$S'_n = \left(u_1 - u_0\right) + \left(u_2 - u_1\right) + \ldots + \left(u_{n+1} - u_n\right) =$$
$$= u_{n+1} - u_0 = u_{n+1} - 1$$

لدينا : $S'_n = u_{n+1} - 1$ ومنه :

$$u_{n+1} = S'_n + 1 = \frac{1}{3}\left(7^{n+1} - 1\right) + 1$$

بماأن : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{3}\left(7^n - 1\right) + 1 = +\infty$

فإن المتتالية (u_n) متباعدة .



تمارين مرفقة بالنتائج

تمرين01

c ، b ، a ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية حيث:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 153 \quad ، \quad a + b + c = 9$$

1)احسب a ، b ، c . 2) نفرض أن الحد الأول لهذه المتتالية الحسابية هو $a = 1$. – احسب S مجموع n حد الأولى لهذه المتتالية.

- النتائج:

1) $(a;b;c) = (1;3;5)$ أو $(a;b;c) = (5;3;1)$.

2) إذا كان $a = 1$ فإن $r = 2$ ومنه الحد الذي مرتبته n هو :

$a + (n-1)r = 2n - 1$. إذن $S = \dfrac{(1 + 2n - 1)}{2} \times n = n^2$

تمرين02

نعتبر المتتالية الهندسية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ ذات الأساس الموجب و حدها الأول $u_1 = \dfrac{1}{2}$ و $81u_{10} = 16u_6$. 1)احسب أساس هذه المتتالية .

2)احسب: $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$. 3)احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

- النتائج:

1) الأساس q للمتتالية هو $q = \dfrac{2}{3}$. (2 $S_n = \dfrac{2}{3}\left[1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]$.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac{3}{2}$.

تمرين03

1) عين عددين حقيقيين موجبين a و b بحيث : a ، $(6a-b)$ ، $(a+2b)$ تكون الثلاثة حدود الأولى u_0 ، u_1 ، u_2 لمتتالية حسابية (u_n) و a ، $(b+1)$ ، $(4b-a)$ تكون الثلاثة حدود الأولى لمتتالية هندسية (v_n). 2) عبر عن u_n و V_n بدلالة n.

- النتائج:

1) $a=2$ و $b=5$. 2) $u_n=2+5n$ و $v_n=2\times 3^n$.

تمرين04

نعتبر المتتالية الهندسية $(u_n)_{n\in N}$ المعرفة بـ $u_0=3$ و العلاقة $u_{n+1}=\frac{4un-2}{u_n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n.

1) برهن أن $u_n\neq 1$ من أجل كل عدد طبيعي n. 2) لتكن المتتالية $(v_n)_{n\in N}$ المعرفة بالعلاقة $v_n=\frac{u_n-2}{u_n-1}$ من أجل كل عدد طبيعي n

برهن أن $(v_n)_{n\in N}$ هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول و أساسها. 3) عبر عن v_n بدلالة n.

4) أ- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. ب - ما هي نهاية u_n لما $n\to+\infty$.

- النتائج:

1) نستعمل البرهان بالتراجع . 2) $v_{n+1}=\frac{2}{3}.v_n$ إذن (v_n) هي متتالية هندسية حدها الأول $v_0=\frac{1}{2}$ و أساسها $\frac{2}{3}$.

3) $v_n=\frac{1}{2}.\left(\frac{2}{3}\right)^n$. 4) أ - $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$ ، ب- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=2$.

تمرين05

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_1=\frac{1}{2}$ و $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n^2+1\right)$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n.

1) احسب u_2 ، u_3 ، u_4 ، u_5. 2) برهن أن (u_n) متزايدة .

3) برهن بأن $0<u_n\leq 1$ مهما يكن العدد الطبيعي غير المعدوم n ، ثم استنتج أن (u_n) متقاربة و احسب نهايتها .

- النتائج:

1) $u_2=0,62$ ، $u_3=0,69$ ، $u_4=0,74$ ، $u_5=0,77$.

2) $u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n-1)^2}{2}\geq 0$ ومنه : (u_n) متزايدة .

3) نستعمل البرهان بالتراجع : لدينا $0 < u_n \leq 1$ ومنه $0 < u_n^2 \leq 1$ و منه : $1 < u_n^2 + 1 \leq 2$ و منه : $\frac{1}{2} < \frac{1}{2}\left(u_n^2 + 1\right) \leq 1$. بما أن (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة . $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

تمرين06

I) لتكن المتتالية (u_n) معرفة بـ : u_0 و u_1 و علاقة التراجع :

$u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n$ ....(1) من أجل كل عدد طبيعي n.

1) برهن أن المتتالية (v_n) المعرفة بـ : $v_n = u_{n+1} - u_n$ هي متتالية هندسية . 2) احسب v_n بدلالة n ، u_0 ، u_1 واستنتج u_n بدلالة n ، u_0 ، u_1 . 3) احسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

II) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة بـ w_0 و W_1 حيث w_0 و w_1 عددين موجبين تماما و $w_{n+2} = \sqrt[5]{(w_{n+1})^2.(w_n)^3}$ من أجل كل عدد طبيعي n. 1) برهن أن المتتالية (t_n) المعرفة بـ : $t_n = lnw_n$ تحقق العلاقة (1) . 2) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n$.

- النتائج:

I) 1) $v_{n+1} = -\frac{3}{5}v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية ذات الأساس $-\frac{3}{5}$.

2) $v_n = (u_1 - u_0)\left(-\frac{3}{5}\right)^n$ ،

$u_n = \frac{5u_1 + 3u_0}{8} - \frac{5}{8}(u_1 - u_0)\left(-\frac{3}{5}\right)^n$.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{5u_1 + 3u_0}{8}$.

II) 1) $t_{n+2} = lnw_{n+2} = \frac{1}{5}\left(2lnw_{n+1} + 3lnw_n\right)$

ومنه : $t_{n+2} = \frac{2}{5}t_{n+1} + \frac{3}{5}t_n$.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \frac{5t_1 + 3t_0}{8} = \frac{5lnw_1 + 3lnw_0}{8}$.

تمرين07

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in N}$ المعرفة بـ $u_0 = 2$

و $u_n = \frac{2 + u_{n-1}}{1 + 2u_{n-1}}$ من أجل $n \geq 1$.

1) برهن أن $u_n \neq -1$ من أجل كل عدد طبيعي n . 2) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in N}$ المعرفة بـ $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$. – أكتب v_n بدلالة v_{n-1} واستنتج عبارة v_n ثم u_n بدلالة n . 3) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

- النتائج:

1)نستعمل البرهان بالتراجع .

2) $v_n=-\frac{1}{3}v_{n-1}$ ، $v_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

و $u_n=-1+\dfrac{2}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$.

تمرين08

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in N}$ المعرفة بـ u_0 و u_1 و علاقة التراجع $u_n=6u_{n-1}-9u_{n-2}$ من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 2$.

1) لتكن المتتالية $(v_n)_{n\in N}$ المعرفة بـ $u_n=3^n.v_n$.

أ – احسب : v_n-v_{n-1} بدلالة $v_{n-1}-v_{n-2}$ واستنتج عبارة v_n-v_{n-1} بدلالة v_0 و v_1 . ب- احسب v_n بدلالة u_0 و u_1 و n

2) نضع $u_0=\frac{1}{3}$ و $u_1=1$. أ- ماذا نقول عن المتتاليتين (v_n) و (u_n) . ب- احسب $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

- النتائج:

1) أ- $v_n-v_{n-1}=v_{n-1}-v_{n-2}=v_1-v_0$.

ب- $v_n=\frac{n}{3}u_1-(n-1)u_0$ ، 2) أ- $v_n=\frac{1}{3}$ المتتالية (v_n) ثابتة

$u_n=3^{n-1}$ المتتالية (u_n) هي متتالية هندسية أساسها 3 .

ب- $S_n=\frac{1}{3}-\frac{1-3^n}{2}$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=+\infty$.

تمرين09

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_n=an+b$ حيث n عدد طبيعي و a ، b عددان حقيقيان . 1) برهن بأن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين حدها الأول u_0 و أساسها r .

2) احسب : $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$ بدلالة a ، b ، n .

3) نفرض أن a عدد حقيقي غير معدوم و نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ : $v_n=3^{U_n}$ من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}$. أ- برهن أن (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعين حدها الأول v_0 و أساسها q .

ب- عين المجال الذي تنتمي إليه a حتى تكون المتتالية (v_n) متقاربة ، ثم احسب $S'_n=v_0+v_1+v_2+...+v_n$ بدلالة a ، b ، n .

4) عين a و b علما أن $v_0=81$ و $S_9=-5$.

احسب في هذه الحالة أصغر قيمة n_0 للعدد n بحيث $v_n<10^{-5}$.

- النتائج:

1) $u_{n+1}-u_n=a$ فالمتتالية (u_n) حسابية أساسها a و حدها الأول $u_0=b$ .2) $S_n=\frac{1}{2}(n+1)(an+2b)$.

3) أ- $\frac{v_{n+1}}{v_n}=3^a$ إذن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية أساسها $q=3^a$ و حدها الأول $v_0=3^b$. ب- تكون المتتالية (v_n) متقاربة لما $a\in]-\infty;0]$ ، $S'_n=\boxed{3^b.\frac{1-3^{(n+1)a}}{1-3^a}}$ ،

4) $a=-1$ ، $b=4$ ، $n_0=15$.

تمرين10

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول u_0 ، $u_n=3u_{n-1}+2$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم. ليكن a عدد حقيقي ، من أجل كل عدد طبيعي n نضع $v_n=u_n+a$.

1) احسب a حتى تصبح المتتالية ذات الحد العام v_n متتالية هندسية أساسها 3 ،و استنتج عبارة u_n بدلالة u_0 و n . 2) عين قيمة u_0 حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة. 3) نفرض أن $a=1$ و $u_0=1$.

أ- احسب بدلالة n المجموع $S_n=v_0+v_1+...+v_n$.

ب- عين أصغر قيمة n_0 للعدد n حتى تكون $S_n>10^4$.

- النتائج:

1) $a=1$ ، $u_n=3^n(u_0+1)-1$.

2) تكون (u_n) ثابتة إذا كان $u_0=-1$. 3) أ- $S_n=3^{n+1}-1$.

ب- لدينا $3^9=19683$ و $3^8=6561$ إذن $n_0=8$.

تمرين11

لتكن المتتالية الهندسية (u_n) ذات الأساس q الموجب تماما .

1) أ- عين q علما أن $625u_{12}=16u_8$. ب- نرمز بـ S_n إلى المجموع $\sum_{K=1}^{n}u_K=u_1+u_2+...+u_K$ ، عبر عن S_n بدلالة u_1 و n

جـ- عين u_1 علما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=1$.

2) نفرض أن المتتالية (u_n) تحقق شروط السؤال الأول (1) و نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بحدها العام $v_n=5u_n-3$.

أ- عبر عن v_n بدلالة n . ب- هل المتتالية (v_n) متقاربة ؟

- النتائج:

1) أ- $q=\frac{2}{5}$. ب- $S_n=\frac{5u_1}{3}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]$ ، جـ- $u_1=\frac{3}{5}$.

2) أ- $v_n=3\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}-1\right]$. ب- $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=-3$ إذن (v_n) متتالية متقاربة.

تمرين12

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $u_0=\frac{1}{2}$ ، $u_n=\frac{3u_{n-1}}{u_{n-1}+1}$.

و نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $v_n=1-\frac{1}{u_n}$ مهما يكن العدد الطبيعي n . 1) برهن أن (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول و أساسها . 2) احسب : $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

3) احسب u_n بدلالة n و استنتج $\lim u_n$ لما $n\to+\infty$.

- النتائج:

1) $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$ ومنه (v_n) هي متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0=-1$. 2) $\lim_{n\to+\infty} v_n=0$.

3) $u_n=\frac{1}{1+3^{-n}}$ ، $\lim_{n\to+\infty} u_n=1$.

تمرين13

استهلاك القمح في الجزائر يزداد كل عام بـ 10% . ليكن $f(0)$ الكمية من القمح المستهلكة حاليا و $f(n)$ الكمية من القمح المستهلكة في n سنة (n عدد طبيعي) . 1) أوجد العلاقة بين $f(n)$ و $f(n+1)$ ، ثم عبر عن $f(n)$ بدلالة $f(0)$ و n .

2) في كم سنة يكون استهلاك الجزائر ضعف الاستهلاك الحالي؟

3) إذا كان في هذه السنة الاستهلاك بلغ $10^6\,(tonnes)$ ، فما هي كمية القمح المستهلكة بعد 20سنة؟

- النتائج:

1) $f(n+1)=\frac{11}{10}f(n)$ ، المتتالية $f(n)$ هندسية أساسها 1,1 ومنه $f(n)=f(0).\left(\frac{11}{10}\right)^n$. 2) $f(n)=2f(0)$ ومنه : $\left(\frac{11}{10}\right)^n=2$ ومنه $n=7$. 3) الكمية المستهلكة في 20سنة هي : $f(20)$ ومنه : $f(20)=f(0).\left(\frac{11}{10}\right)^{20}$ ومنه :

$$f(20)=10^6.\left(\frac{11}{10}\right)^{20}=\boxed{6,72\times10^6\,(tonnes)}$$.

تمرين14

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بـ: $u_1=1$ ، $(u_{n+1})^2=4u_n$.

1) احسب u_2 ، u_3 ، u_4 ، u_5 و أعط النتائج على الشكل 2^a .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ $v_n=lnu_n-ln4$. برهن أن (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول و أساسها .

3) عبر عن v_n بدلالة n و استنتج u_n . احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

4) عين قيم n التي من أجلها يكون $u_n > 3,96$.

- النتائج:

1) $u_2 = 2$ ، $u_3 = 2^{\frac{3}{2}}$ ، $u_4 = 2^{\frac{7}{4}}$ ، $u_5 = 2^{\frac{15}{8}}$.

2) $v_{n+1} = ln\left(\frac{u_{n+1}}{4}\right) = \frac{1}{2}ln\left(\frac{u_n}{4}\right) = \frac{1}{2}v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_1 = -2ln2$.

3) $v_n = v_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{ln2}{2^{n-2}}$ ، $lnu_n = v_n + ln4$ ومنه :

$u_n = 4e^{-\frac{ln2}{2^{n-2}}}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

4)يكون $u_n > 3,96$ إذا كان $n \ge 9$.

تمرين15

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = -1$ و من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = \frac{3+2u_n}{2+u_n}$. 1) احسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

2) برهن أن $u_n > 0$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

3) برهن أن (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد $\sqrt{3}$.

4) عين اتجاه تغيرات المتتالية (u_n). 5) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$ ، من أجل كل عدد طبيعي n .

أ- برهن أن (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول v_0 و أساسها . ب- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

- النتائج:

1) $u_1 = 1$ ، $u_2 = \frac{5}{3}$ ، $u_3 = \frac{19}{11}$. 2) نستعمل البرهان بالتراجع لنبرهن أن $u_n > 0$. 3) نستعمل البرهان بالتراجع لنبرهن أن $u_n < \sqrt{3}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

4) $u_{n+1} - u_n = \frac{(\sqrt{3}+u_n)(\sqrt{3}-u_n)}{2+u_n}$ ونعلم أن $u_n > 0$ و $u_n < \sqrt{3}$ (السؤالين 2و3) إذن $u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه (u_n) متتالية متزايدة. 5) أ- $v_{n+1} = (2-\sqrt{3})^2 \times v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $(2-\sqrt{3})^2$ و حدها الأول $v_0 = -\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}$.

ب- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$.

تمرين16

(u_n) متتالية حسابية متناقصة أساسها r و حدها الأول u_0 حيث :

$u_1+u_2+u_3=18$ و $u_1^2+u_2^2+u_3^2=116$.

1) أ- عين الحد الأول u_0 و الأساس r لهذه المتتالية .

ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n . 2) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ $v_n=e^{U_n}$.(e هو أساس اللوغارتم النبيري : $e=2,71...$) . أ- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 . ب- نضع $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$ و $S'_n=v_0\times v_1\times...\times v_{n-1}$.

– احسب S_n و S_n' ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n'$.

- النتائج:

1) أ- $u_0=10$ و $r=-2$. ب- $u_n=10-2n$.

2) أ- $v_{n+1}=\frac{1}{e^2}\times v_n$ ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{e^2}$ وحدها الأول $v_0=e^{10}$. ب- $S_n=\frac{1-e^{-2n}}{e^2-1}\times e^{12}$ و $S_n'=e^{-n^2+11n}$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n'=0$.

تمرين17

لتكن المتتالية ذات الحد العام و المعرفة بـ u_n بـ $u_n=2^n-5n+6$ من أجل كل عدد طبيعي n . 1) احسب u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 .2) نعتبر المتتاليتين $(v_n)_{n\in N}$ ، $(w_n)_{n\in N}$ و المعرفتين بـ : $w_n=5n-6$ و $v_n=2^n$. أ- برهن أن (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول v_0 و أساسها q . ب- برهن أن (v_n) متباعدة.

جـ برهن أن (w_n) هي متتالية حسابية يطلب تعيين حدها الأول w_0 وأساسها r .

3) نضع : $S'_n=v_0\times v_1\times...\times v_{n-1}$ ، $S''_n=w_0+w_1+...+wn$ و $S_n=u_0+u_1+...+u_n$.

– احسب S_n' و S_n'' و S_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n''$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n'$.

- النتائج:

1) $u_0=7$ ، $u_1=3$ ، $u_2=0$ ، $u_3=-1$. 2) أ- لدينا: $v_{n+1}=2^{n+1}=2^n\times2=2\times v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 و حدها الأول $v_0=1$. ب- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$ ومنه : (v_n) هي متتالية متباعدة . جـ- $w_{n+1}-w_n=5$ ومنه (w_n) هي متتالية حسابية أساسها $r=5$ وحدها الأول $w_0=-6$.

3) $S_n' = 2^{n+1} - 1$ و $S_n'' = \frac{n+1}{2}\times(5n-12)$

و $S_n = S_n' - S_n'' = 2^{n+1} - 1 - \frac{n+1}{2}(5n-12)$.

$\lim_{n\to+\infty} S_n'' = +\infty$ ، $\lim_{n\to+\infty} S_n' = +\infty$.

تمرين18

$(u_n)_{n\in N}$ متتالية هندسية موجبة حيث : $u_1\times u_3 = 64$

و $5u_1+u_2=88$. 1) عين u_1 ، u_2 ، u_3 وأساس المتتالية .

2- أ) عبر عن u_n بدلالة n. ب) احسب $S_n = u_0+u_1+...u_{n-1}$

3)عين الحد الذي نبدأ منه بحيث يكون مجموع 5 حدود متتابعة من (u_n) يساوي $\frac{31}{16}$. 4) نعتبر المتتالية (α_n) المعرفة بـ :

$\alpha_0=\frac{1}{2}$ و $\alpha_n = \frac{1}{n^2+3n+2}$ مهما يكن العدد الطبيعي n .

أ-عين العددين الحقيقيين γ و β حيث $\alpha_n = \frac{\gamma}{n+1}+\frac{\beta}{n+2}$

ب- احسب $S'=\alpha_0+\alpha_{10}+...+\alpha_{n-1}$.

- النتائج:

1) $u_1=16$ ، $u_2=8$ ، $u_3=4$. أساس المتتالية (u_n) هو $\frac{1}{2}$.

2) أ - $u_n = 32\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$. ب- $S_n = 64\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$.

3) الحد الذي نبدأ منه هو $u_5=1$. 4) أ - $\gamma=1$ ، $\beta=-1$.

ب - $S'=\alpha_0+\alpha_{10}+...+\alpha_{n-1} = 1-\frac{1}{n+1}$

تمرين19

نعرف المتتالية (v_n) بـ : $v_1=20$ ، $v_3=10$ و

$v_{n+1}-2v_n+v_{n-1}=0$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

1) اثبت أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين حدها الأول v_0 وأساسها r. 2) عين عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم احسب : $S_n = v_2+v_3+...v_{n-3}$. 3) عين العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n=15$. 4) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_n = 2^{v_n+6n-24}$ من أجل كل عدد طبيعي n . أ) برهن أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين حدها الأول u_0 وأساسها q .

ب) احسب : $P=u_0\times u_1\times ...u_{n-1}$

و $S_n' = u_0 + \left(\frac{1}{2}\right)u_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 u_2+...+\left(\frac{1}{2}\right)^n u_n$.

- النتائج:

1) $v_{n+1}-v_n = v_n - v_{n-1}$ ومنه المتتالية (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=-5$ و حدها الأول $v_0=v_1-r=25$.

2) $v_n = 25-5n$ ، $S_n=(55-5n)\left(\frac{n-4}{2}\right)$.

3) $S_n=15$ إذا كان $n=10$. 4) أ- $u_n = 2^{n+1}$ و $\frac{u_n}{u_{n-1}}=2$

إذن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=2$ و حدها الأول $u_0=2$.

ب- $P=\frac{n}{2}(n+1)$ ، $S'_n = 2(n+1)$.

تمرين20

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية حدودها أعداد طبيعية حيث v_0 أولي مع 5 و $v_0+v_2=55$. 1) احسب v_0 ، v_1 ، v_2 . 2- أ) عبر عن v_n بدلالة n . ب) احسب : $S_n = v_4+v_5+...+v_{n+7}$.

3) عين العدد الطبيعي n حيث: $S_n - 2^{6n+2}+3 \equiv 0[7]$.

4) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث : $v_n = u_n - 2n - 1$.

احسب : $S'_n = u_4+u_5+...+u_{n+7}$.

- النتائج:

1) $v_0=11$ ، $v_1=22$ ، $v_2=44$. 2) أ- $v_n = 11\times 2^n$.

ب- $S_n = 176(2^{n+4}-1)$. 3) $S_n - 2^{6+2}+3\equiv 0[7]$ إذا كان $n=3k$ مع $k\in\mathbb{N}$.

4) $S'_n = 176(2^{n+4}-1)+(n+12)(n+4)$.

تمرين21

1) a ، b ، c أعداد طبيعية بهذا الترتيب تشكل متتالية حسابية متزايدة .1) عين أ ، ب، جـ علما أن $a+c=30$ و $PPCM(a,c)=24$ (المضاعف المشترك الأصغر) و $PGCD(a,b)=6$ (القاسم المشترك الأكبر) .

2) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بحدها العام $u_n = 6+9n$.

أ- أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 . ب- برهن أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول. جـ) عين رتبة الحد الذي قيمته 96 .

3) أ- احسب : $S_n = u_0+u_1+...+u_{n-1}$ و $\pi_n = e^{u_0}\times e^{u_1}\times ...\times e^{u_{n-1}}$.

ب- عين العدد الطبيعي n حتى يكون $\ln\pi_n = 465$.

- النتائج:

1) $a=6$ ، $b=15$ ، $c=24$. 2) أ- $u_0=6$ ، $u_1=15$ ، $u_2=24$.

ب- $u_{n+1}-u_n=9$ فالمتتالية (u_n) حسابية أساسها $r=9$ و حدها الأول $u_0=6$. جـ - رتبة الحد الذي قيمته 96هي 11 و هو الحد u_{10} . 3) أ- $S_n=(9n+3)\times\frac{n}{2}$ ، $\pi_n = e^{\frac{n}{2}(9n+3)}$

ب - $\ln \pi_n = 465$ لما $n=10$.

تمرين22

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي :

$u_1 = 1$ و $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{2}$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n.

و $v_1 = 12$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$. 1) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم :

$k_n = v_n - u_n$. أ) برهن أن المتتالية (k_n) هندسية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها. ب) عبر عن k_n بدلالة n .

2) برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة وأن (v_n) متناقصة .

3- أ) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $\alpha_n = 3u_n + 8v_n$

برهن أن المتتالية (α_n) ثابتة . ب)استنتج عبارة v_n و u_n بدلالة n.

- النتائج:

1)أ - $k_{n+1} = \dfrac{1}{12} \times k_n$ ، فالمتتالية (k_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{12}$

و حدها الأول $k_1 = 11$. ب- $k_n = 11 \times \left(\dfrac{1}{12}\right)^{n-1}$.

2) $u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة

و $v_{n+1} - v_n < 0$ ومنه المتتالية (v_n) متناقصة .

3) أ- $\alpha_{n+1} = \alpha_n$ ومنه المتتالية (α_n) ثابتة.

ب- $v_n = 3 \times \left(\dfrac{1}{12}\right)^{n-1} + 9$ و $u_n = -8 \times \left(\dfrac{1}{12}\right)^{n-1} + 9$.

تمرين23

I) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ :

من أجل كل عدد طبيعي n $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} - 1 = u_n + 2n + 3^n \end{cases}$.

1) احسب المجاميع الآتية:

$S_1 = 1 + 3 + 5 + ... + (2n+1)$ ، $S_2 = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^n$ ،

$S = S_1 + S_2$. 2) نعتبر المتتالية (α_n) المعرفة بـ:

$\alpha_n = u_{n+1} - u_n$.

احسب : $S = \alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_n$ ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

II) (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 1$ وأساسها موجب

حيث : $\dfrac{v_n \times v_{n+2}}{v_{n-1} \times v_{n+1}} = 9$.

أ) عين أساس المتتالية (v_n). ب) عبر عن v_n بدلالة n .

حـ - احسب المجموع $S_n = v_0 + \dfrac{v_1}{3^1} + \dfrac{v_2}{3^2} + ... + \dfrac{v_n}{3^n}$.

- النتائج:

I) 1) $S_1 = (n+1)^2$ و $S_2 = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$

و $S = S_1 + S_2 = (n+1)^2 + \frac{3^{n+1}-1}{2}$.

2) $u_n = n^2 + \frac{3^n - 1}{2} - 1$.

II) أ – أساس المتتالية (v_n) هو $q = 3$.   ب- $v_n = 3^n$.

جـ- $S_n = \boxed{n+1}$.

تمرين24

نعتبر المتتالية العددية (u_n) حيث : $u_0 = 0$ و

$u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + 1)$ مهما يكن العدد الطبيعي n

1- أ) برهن أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن $0 \le u_n < 1$.

ب) برهن أن (u_n) متزايدة تماما .

2- لتكن المتتالية (v_n) المعرفة بـ $v_n = u_n - \alpha$ من أجل كل عدد طبيعي n حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ - عين قيمة α. حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 .

3- فيما يلي نفرض أن $\alpha = 1$.   أ) احسب المجاميع الآتية:

$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$ ، $S'_n = v_0^2 + v_1^2 + ... + v_{n-1}^2$.

ب) نعتبر المتتالية (β_n) المعرفة بـ من أجل كل عدد طبيعي n :

$\beta_n = v_n + 2n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$.   - بين أن (β_n) هي متتالية حسابية

يطلب تحديد أساسها r وحدها الأول β_0 .

جـ) استنتج مجموعة الأعداد الزوجية الأصغر من 102 .

د) أحسب $\pi_n = \beta_5 + \beta_6 + ... + \beta_n$ ثم عين قيمة العدد الطبيعي n لكي يكون $\pi_n = 90$.

- النتائج:

1) أ – نستعمل البرهان بالتراجع.

ب- $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(1 - u_n) > 0$ ومنه (u_n) متزايدة.

2) إذا كان $\alpha = 1$ فإن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ و حدها الأول $V_0 = -1$.

3) أ - $S_n = 3\times\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right] + n$ ، $S'_n = \frac{9}{5}\times\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$

ب- $\beta_n = V_n + 2n + \left(\frac{2}{3}\right)^n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 2n + \left(\frac{2}{3}\right)^n = 2n$

و بما أن $\beta_{n+1} - \beta_n = 2$ فالمتتالية (β_n) حسابية أساسها 2 و حدها الأول $\beta_0 = 0$.

جـ - مجموع الأعداد الزوجية الأصغر من 102 هو :

$(0+100)\times\frac{51}{2} = 2550$. د - $\pi_n = (n+5)(n-4)$. قيمة n حتى يكون $\pi_n = 90$ هي $n = 10$.

تمرين25

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n \end{cases}$$

1) احسب u_1 و u_2 .

2) أ- أثبت أن : $u_n \geq n$ مهما يكن العدد الطبيعي غير المعدوم n .

ب- استنتج $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. 3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n :

$v_n = u_n - 4n + 8$. أ- احسب v_0 و v_1 . ب- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$. جـ - احسب v_n بدلالة n ثم استنتج قيمة u_n بدلالة n .

- النتائج:

1) $u_1 = 1$ و $u_2 = \frac{5}{2}$. 2) أ- نبرهن بالتراجع .

ب- $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = +\infty$. 3) أ- $v_0 = 10$ و $v_1 = 5$.

ب – لدينا $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ فالمتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

جـ - $v_n = 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، $u_n = 10\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n - 8$.

تمرين 26

نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بما يلي :

$u_1 = 1$ و $v_1 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي 2 بـ:

$3u_n - v_{n-1} = \frac{2-n}{n-1}$ و $u_n - v_n = -1 + \frac{1}{n}$.

1) أحسب u_2 و v_2 . 2- أ) بين أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$

ب) أحسب u_n ثم v_n بدلالة n .

3- أ) أثبت باستعمال البرهان بالتراجع أن : $u_n \leq \frac{1}{n}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

ب) بين أن : $1 - \frac{1}{n} \leq v_n \leq 1$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

جـ) استنتج أن المتتالية (v_n) متقاربة وحدد نهايتها .

- النتائج :

1) $u_2 = \frac{1}{3}$ ، $v_2 = \frac{5}{6}$. 2- أ) $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n$ إذن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$. ب) $u_n = \frac{1}{3^{n-1}}$ و $v_n = \frac{1}{3^{n-1}} + 1 - \frac{1}{n}$. 3- ج) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$ إذن (v_n) متقاربة.

تمرين 27

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \alpha)$ حيث α عدد حقيقي .

1) أحسب u_1 , u_2 , u_3 .

2) بين أن لكل عدد n من $\mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{1}{2^n} + \alpha\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + ... + \frac{1}{2}\right).$$

3) نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n = u_n - \alpha$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية محدد أساسها وحدها الأول

ب) أحسب بدلالة n و α المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

ج) أحسب $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

- النتائج :

1) $u_1 = \frac{1}{2}(\alpha + 1)$, $u_2 = \frac{1}{4}(3\alpha + 1)$.

2)نستعمل البرهان بالتراجع أو المجموع $s = \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + ... + \frac{1}{2}\right)$ لـ n حدا لمتتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $\frac{1}{2}$.

3) $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$ وهذا يعني أن (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = 1 - \alpha$.

تمرين28

نعتبر المتتالية الهندسية (u_n) غير منتهية وكل حدودها موجبة حيث حدها ألأول $u_1 = 3$ و $u_3 + u_5 = \frac{15}{6}$. 1) عين أساس هذه المتتالية

2- أ) أحسب المجموع $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

ب) أحسب $\lim_{n \to +\infty} S_n$. نضع $v_n = \ln u_n$

3- ا) برهن أن المتتالية (v_n) هي متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها . ب) أحسب المجموع $S'_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$

- النتائج :

1) $q = \frac{1}{2}$. 2- أ) $S_n = 6\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$. ب) $\lim_{n \to +\infty} S_n = 6$

3- أ) $v_{n+1} - v_n = -\ln 2$ إذن (v_n) متتالية حسابية أساسها $-\ln 2$

ب) $S'_n = \ln \frac{81}{64}$

تمرين 29

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 الموجب تماما ومن أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة التراجعية $u_{n+1}-u_n=0,05u_n$

1- أ) أثبت أن (u_n) متتالية هندسية . ب) أحسب u_n بدلالة n و u_0

2) نضع $S_n=u_0+u_1+...+u_n$. أحسب S_n بدلالة n و u_0 ثم عين n حتى يكون $S_n \ge 20u_0$.

3) بلغ عدد سكان بلد 20مليون نسمة يوم 1جانفي 1987.
نفرض أن عدد سكان هذا البلد يرتفع كل سنة بنسبة قدرها 5%.
أ) ما هو عدد سكان هذا البلد يوم 1جانفي 1990.
ب) ابتداء من أي سنة سيتجاوز عدد سكان هذا البلد 30مليون نسمة ؟

- النتائج :

1- أ) من العلاقة التراجعية نستنتج ما يلي : $u_{n+1}=1,05u_n$

إذن (u_n) متتالية هندسية أساسها 1,05. ب) $u_n=u_0\times(1,05)^n$

3- أ) عدد سكان يوم 1جانفي 1990هو 23,152 مليون
ب) ابتداء من سنة 1996 سيتجاوز عدد سكان هذا البلد 30مليون .

تمرين 30

(v_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول v_0 الموجب تماما

ولكل n من $\mathbb{N}$ بالعلاقة التراجعية : $v_{n+1}=\dfrac{5v_n+2}{v_n+4}$.

1) برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $v_n>0$

2) عين v_0 حتى تكون (v_n) متتالية ثابتة .

3) نفرض أن $v_0=3$ ونضع $u_n=\dfrac{v_n-2}{v_n+\alpha}$ حيث α عدد حقيقي موجب . أ) عين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول u_0 .

ب) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n \neq 1$.

ج) نفرض أن $\alpha=1$. أحسب u_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n

- النتائج :

1) نستعمل البرهان بالتراجع . 2) تكون (v_n) ثابتة إذا كان $\alpha=2$

3- أ) تكون المتتالية (u_n) هندسية إذا كان $\alpha=1$ ويكون أساسها $q=\dfrac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0=\dfrac{1}{4}$.

ب) $u_n=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2^n}$ ، $v_n=-1-\dfrac{3}{\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2^n}-1}$.



تمارين مقترحة للحل

تمرين01

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية حسابية متزايدة حيث:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 14 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 94 \end{cases}$$

1) عين u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

2) احسب : $S_n = u_4 + u_5 + \ldots + u_{2007}$.

تمرين02

a ، b ، c بهذا الترتيب تشكل 3 حدود متعاقبة لمتتالية حسابية .

$\frac{1}{a}$ ، $\frac{2}{b}$ ، $\frac{3}{c}$ بهذا الترتيب تشكل 3 حدود متعاقبة لمتتالية هندسية.

- احسب a ، b ، c علما أن : $a+b+c=9$.

تمرين03

I) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية متزايدة حيث: $u_3 = 17$ و $u_7 = 33$

و تحقق: $u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 0$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم . 1) أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها .

2) أكتب عبارة u_n بدلالة n .

II) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية حدها الأول v_0 و أساسها r .



S_n هو مجموع n حد الأولى لهذه المتتالية حيث: $S_n = 2n^2 + 3n$

- احسب v_0 و الأساس r . – عين عبارة v_n بدلالة n.

تمرين04

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ 4u_{n+1} - 2u_n = 9 \end{cases}$

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة كما يلي: $v_n = 2u_n - 9$

1) احسب u_1 ، u_2 ، u_3 ثم v_1 ، v_2 ، v_3 .2) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها . 3) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n . 4) احسب المجاميع الآتية:

$S_1 = v_0 + v_1 + ... + v_n$ ، $S_2 = v_0^{\ 2} + v_1^{\ 2} + ... + v_n^{\ 2}$ ،

$S_3 = u_0 + u_1 + ... + u_n$ ، $S_4 = u_0^{\ 2} + u_1^{\ 2} + ... + u_n^{\ 2}$.

تمرين05

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة بـ $u_n = 4n + 3$.

1) بين أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

2)هل العددين 2003 و2426 حدان من هذه المتتالية ؟

3)ما قيمة و رتبة الحد الذي نبدأ به حتى يكون مجموع 20حدا متتابعة من هذه المتتالية مساويا لـ 1620 ؟ 4) عين أصغر عدد طبيعي n حتى يكون $u_n > 8003$.

5) احسب الجداء $P_n = 3^3 \times 3^7 \times 3^{11} \times ... \times 3^{4n+3}$.

تمرين06

نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي: $\begin{cases} v_1 = 20 \quad , v_0 = 1 \\ v_{n+2} = 8v_{n+1} - 16v_n \end{cases}$

1) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $\alpha_n = \frac{v_n}{4^n}$.

أ- بين أن (α_n) هي متتالية حسابية محدد أساسها و حدها الأول .

ب – احسب α_n ثم v_n بدلالة n .

2) نعتبر المجموع $S_n = \alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_n$. عين العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = 190$.

تمرين07

(u_n)متتالية عددية معرفة بـ $u_0 = \alpha$ حيث α عدد حقيقي والعلاقة التراجعية: $u_{n+1} = \sqrt{7u_n - 10}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

1) عين α حتى تكون (u_n) ثابتة. 2) نضع $\alpha = 3$. أ – أثبت أن $2 < u_n < 5$ من أجل كل عدد طبيعي n . ب – أثبت أن (u_n) متزايدة تماما . 3) نضع $\alpha = 6$ ، أثبت أن $u_n > 5$ ،من أجل كل عدد طبيعي n و استنتج تغيرات (u_n) .

تمرين08

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ $u_0 = -1$ و العلاقة التراجعية

$3u_{n+1} = u_n + 8n + 14$. أ – احسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

ب – لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $v_n = u_n + \alpha n + \beta$ من أجل كل عدد طبيعي n حيث α و β عددان حقيقيان . عين α و β حتى تكون (v_n) متتالية هندسية ثم عين أساسها و حدها الأول .

جـ - أكتب عبارة v_n ثم u_n بدلالة n . 2)احسب المجاميع الآتية :

$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ ، $\alpha_n = v_0 + 3v_1 + 3v_2 + ... + 3^n v_n$

تمرين09

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ $u_1 = \alpha$ حيث α عدد حقيقي غير معدوم والعلاقة التراجعية: $3u_{n+1} = 2u_n + 4$ من أجل كل عدد طبيعي n . 1) عين α حتى تكون (u_n) ثابتة. 2) نضع $\alpha < 4$.

أ- أثبت أنه من أجل كل عدد n غير معدوم فإن $u_n < 4$.

ب- أدرس اتجاه تغيرات (u_n) ، ماذا تستنتج؟ 3) (v_n) متتالية عددية معرفة بـ : $v_n = \frac{1}{2}u_n - \beta$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم(β عدد حقيقي) .أ– عين β حتى تكون (v_n) متتالية هندسية، عين أساسها . ب- احسب u_n و v_n بدلالة n و α .

نضع $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$.عين α حتى تكون $\lim_{n\to+\infty} S_n = 9$.

تمرين10

$(v_n)_{n\in N}$ متتالية عددية معرفة بحدها الأول v_0 و بالعلاقة التراجعية $v_{n+1} = \frac{4}{4-v_n}$. 1) حدد قيمة v_0 حتى تكون المتتالية (v_n) ثابتة.

2) برهن انه إذا كان $v_0 < 2$ فإن $v_n < 2$ مهما يكن العدد الطبيعي n و أن (v_n) متتالية رتيبة. 3) نضع $v_0 = 1$. أ- احسب v_1 ، v_2 ، v_3 .

ب- نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in N}$ المعرفة بحدها العام $u_n = \frac{1}{v_n - 2}$.

برهن أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

جـ - أكتب u_n ثم v_n بدلالة n . د) احسب: $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ، $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

تمرين11

$(u_n)_{n\in N}$ متتالية عددية معرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3} \end{cases}$

1) برهن بالتراجع أن $0 \le u_n < 1$ مهما يكن العدد الطبيعي n ، ثم استنتج أن (u_n) متزايدة تماما . - لتكن f دالة عددية حيث: $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$. عين العدد الحقيقي α بحيث $f(\alpha) = \alpha$.

2) $(v_n)_{n\in N}$ متتالية عددية معرفة بـ: $v_n = u_n - \alpha$.

أ-أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

جـ - احسب المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و استنتج $S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.د- احسب: $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ، $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

تمرين12

I) $(v_n)_{n\in N^*}$ متتالية عددية معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} v_0 = 2 \quad ; \ 0 < \alpha < \frac{1}{2} \\ v_{n+1} = 2\alpha v_n + 3 \end{cases}$$

1)برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $v_n > 0$.

II)نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in N}$ المعرفة كما يلي:

$$u_n = v_n + \frac{3}{2\alpha - 1}$$

1) برهن أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

2) عبر عن u_n بدلالة α و n ثم استنتج عبارة v_n بدلالة α و n .

3)احسب: $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

4)نفرض أن $\alpha = \frac{1}{4}$ احسب $S_n = v_{10} + v_{11} + ... + v_{2n}$.

تمرين13

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = -1$ و $u_1 = 2$

و $u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + 4u_{n-1})$ حيث $n \geq 1$.

1)احسب u_2 و u_3 . 2) لتكن $(v_n)_{n\in N}$ المتتالية العددية المعرفة كمل يلي: $v_n = u_{n+1} - u_n$. أ-احسب v_0 ، v_1 ، v_2 .

ب- بين أن (v_n) متتالية هندسية ثم عين أساسها و حدها الأول .

جـ - احسب v_n بدلالة n .د – نضع $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

من أجل كل عدد طبيعي n ، احسب S_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالا n ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

تمرين14

نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي :

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + n - 1 \text{ ، } v_0 = 1$$

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة كما يلي: $u_n = 4v_n - 6n + 15$.

1) بين أن (u_n) متتالية هندسية . 2) احسب u_0 ثم أكتب عبارة u_n بدلالة n و استنتج أن $v_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$ من أجل كل عدد طبيعي n.

3) بين أن المتتالية (v_n) يمكن كتابتها على الشكل
$V_n = \alpha_n + \beta_n$ حيث (α_n) متتالية هندسية و (β_n) متتالية حسابية .
4) احسب $S'_n = \alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_n$ ، $S''_n = \beta_0 + \beta_1 + ... + \beta_n$
و استنتج عبارة $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

تمرين15

لتكن (u_n) متتالية حقيقية معرفة كما يلي: $u_0 = 2$
و $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 6$ 1) أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .
2) أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 8 . 3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أوجد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. 4) لتكن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة كما يلي : $v_n = u_n + \alpha$ حيث $\alpha \in \mathbb{N}$.
أ- عين قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية . ب- احسب v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n . جـ - احسب $S_1 = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$
و $S_2 = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$

تمرين16

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي: $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n بـ $u_{n+1} = \frac{u_n^{\,3}}{1+u_n^{\,2}}$

1) بين أن $u_n \geq 0$ لكل عدد طبيعي n .
2) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة .
3) برهن أن (u_n) متقاربة .
4) بين أن $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

تمرين17

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية عددية معرفة كما يلي : $v_0 = e^3 - 1$ ومهما يكن العدد الطبيعي n فإن $e^3.v_{n+1} = 1 - e^3 + v_n$.
1)أ- احسب v_1 ، v_2 ، v . ب- أثبت أن $1 + v_n > 0$ من أجل كل عدد طبيعي n . جـ بين أن (v_n) متناقصة تماما.
2) $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة كما يلي : $\alpha_n = 2(1 + v_n)$.
أ-بين أن (α_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .
ب- احسب α_n بدلالة n . جـ نضع $S_n = \alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_n$
احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ .3) عين n حتى يكون $S_n = 2\times10^{-9}$ (يعطى $\log 10 = 2,3$).

تمرين18

1) لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ u_0 و العلاقة التراجعية $u_{n+1} = 1,05u_n + 1000$.نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ :

$v_n = u_n + 2000$. 1) أ- برهن أن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها . ب- احسب v_n بدلالة v_0 و n و استنتج u_n بدلالة u_0 و n . جـ - احسب المجموع $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

2) في 1 جانفي 1978 عدد سكان مدينة هو 20000 ساكنا ، كل عام يزداد عدد سكان هذه المدينة بـ 5% ، ضافة إلى 1000 شخص يأتون للإقامة بها بصفة نهائية . أ- عين عدد السكان في 1 جانفي 1983 .
ب- عدد التلاميذ في الطور الابتدائي يمثل 20% من عدد السكان ، إذا خصصنا معلما لكل 40 تلميذا،ما هو عدد المعلمين في1 جانفي 1983؟

تمرين19

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي: $u_0 = \frac{1}{2}$ ،

$u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n}$. 1) احسب u_1 ، u_2 .

2) أ- بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 0$.

ب- بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n - 1 < 0$.

3) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تاما .

4) لتكن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة بـ : $v_n = \frac{1-u_n}{u_n}$.

1) أ- برهن أن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0. ب- احسب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n .

تمرين20

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي: $u_0 = \frac{1}{4}$ ،

$u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{2}u_n$. 1) أ- احسب u_1 ، u_2 .

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0 \le u_n < \frac{1}{4}$.

2) بين أن (u_n) متتالية متناقصة.

3) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_{n+1} \le \frac{3}{4}u_n$.

ب-استنتج أن: $u_n \le \left(\frac{3}{4}\right)^n u_0 + \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

4)حدد نهاية المتتالية (u_n) .

تمرين21

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي: $u_0 = \frac{1}{2}$ ،

$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$. 1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 0$. 2) نضع $v_n = \frac{-1+u_n}{1+u_n}$. أوجد العلاقة

بين v_{n+1} و v_n . استنتج نهاية v_n لما n تؤول إلى $+\infty$ ثم نهاية u_n لما n تؤول إلى $+\infty$ ثم نهاية .

تمرين22

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفتين كما يلي:

$u_1=1$ و $V_1=1$ و $3u_n-v_{n-1}=\frac{2-n}{n-1}$ ، $u_n-v_n=-1+\frac{1}{n}$

من أجل $n\geq 2$

1) أ-احسب u_2 و v_2 . ب- بين أن المتتالية (u_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$

جـ - احسب u_n ثم v_n بدلالة n .

2) أ- أثبت أن $u_n\leq\frac{1}{n}$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

(استعمل البرهان بالتراجع) .ب- بين أن $1-\frac{1}{n}\leq v_n\leq 1$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n . جـ استنتج أن المتتالية (v_n) متقاربة و حدد نهايتها .

3) احسب الجداء $P_n=u_1\times u_2\times\ldots\times u_n$ ثم $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n$.

تمرين23

لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بحدها الأول u_0 و العلاقة التراجعية $u_{n+1}=\frac{3u_n+4}{u_n}$.

I) نفرض أن $u_0=4$. 1) احسب u_1 ، u_2 . 2) بين بالتراجع أن (u_n) ثابتة .

II) نفرض فيما يلي أن $u_0=1$ و نضع $v_n=\frac{u_n-4}{u_n+1}$ لكل عدد طبيعي n . 1) بين أن (v_n) متتالية هندسية و حدد أساسها .

2) بين أن (v_n) متقاربة واحسب نهايتها .

3) احسب $S_n=v_5+v_6+\ldots+v_{n+5}$.

تمرين24

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-n-\frac{8}{3} \end{cases}$$

1) نعرف متتالية جديدة (v_n) بـ: $v_n=u_n+\alpha n-1$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}$.أ- أوجد العدد الحقيقي α بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية

ب- في هذه الحالة احسب v_n بدلالة n .

2) نضع $v_n=u_n+3n-1$. احسب u_n بدلالة n .

3) أ- احسب بدلالة n المجموع $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$.

ب- احسب نهاية S_n لما تؤول n إلى $+\infty$.

4) احسب بدلالة n المجموع $S'_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$.

تمرين25

(v_n) متتالية حسابية متناقصة حدها الأول v_0 و أساسها r .

1) عين v_2 و r علما أن : $\begin{cases} v_1+v_2+v_3=24 \\ {v_1}^2+{v_2}^2+{v_3}^2=210 \end{cases}$

2) أ- استنتج v_n بدلالة n .ب- احسب $v_0+v_1+...+v_n$.

3) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $u_n=e^{14-3n}$

أ- بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها . ب- احسب المجموع $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ و الجداء $\pi_n=u_0\times u_1\times...\times u_n$.

ب- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \pi_n$.

تمرين 26

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي :

$u_1=\alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $3u_{n+1}=2u_n-4$

1) عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

2) نفرض أن $\alpha>-4$.

أ) برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن : $u_n>-4$

ب) أدرس اتجاه تغيرات المتتالية (u_n).

3) نفرض في ما يأتي أن $\alpha=2$

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

بـ : $v_n=\frac{1}{2}u_n+2$. أ) برهن أن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها ألأول .

ب) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n.

ج) أحسب المجموع : $S_n=u_4+u_5+...+u_{n-3}$.

تمرين 27

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة التراجعية : $u_{n+1}=\alpha u_n+\beta$ حيث α و β عددين حقيقيين $(\alpha\neq 0)$.

1) عين α حتى تكون (u_n) حسابية ثم أحسب u_n بدلالة n و β

2) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n

بـ : $v_n=u_{n+1}-u_n$. أ)بين أن (v_n) متتالية هندسية ثم أحسب S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$ واستنتج عبارة u_n بدلالة α,β,n

2) عين قيم α حتى تكون (u_n) متقاربة .3) نضع $\alpha=\frac{1}{2}$ و $\beta=1$

- أحسب: $\pi_n=u_0+2u_1+2^2u_2+...+2^{n-1}u_{n-1}$.

تمرين 28

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة في $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=2$ ون أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+2n$. 1) أحسب u_1 , u_2 .

-2 أ) أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n \ge n$

ب) استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 4n + 8$

أ) أحسب v_1 , v_0 . ب) بين أن (v_n) متتالية هندسية.

ج) أحسب v_n بدلالة n . 4) أحسب : $S_1 = v_1 + v_2 + ... + v_n$

$S_2 = u_0 + u_1 + ... + u_n$ ، $\pi_n = v_0 \times v_1 \times ... \times v_n$.

تمرين 29

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = \frac{1}{4}$ وبالعلاقة

التراجعية : $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$.

-1 أ) عين العددين الحقيقيين a, b بحيث من أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 4}$. ب) باستعمال البرهان بالتراجع أثبت أن

من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 < u_n < 1$.

جـ) استنتج اتجاه تغيرات المتتالية (u_n).

2) لتكن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها

ب) عين عبارتي v_n و u_n بدلالة n

تمرين 30

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = 10$ ومن أجل

كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{9u_n - 49}{u_n - 5}$.

1) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \neq 7$.

2) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ:

$v_n = \frac{1}{u_n - 7}$. أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها

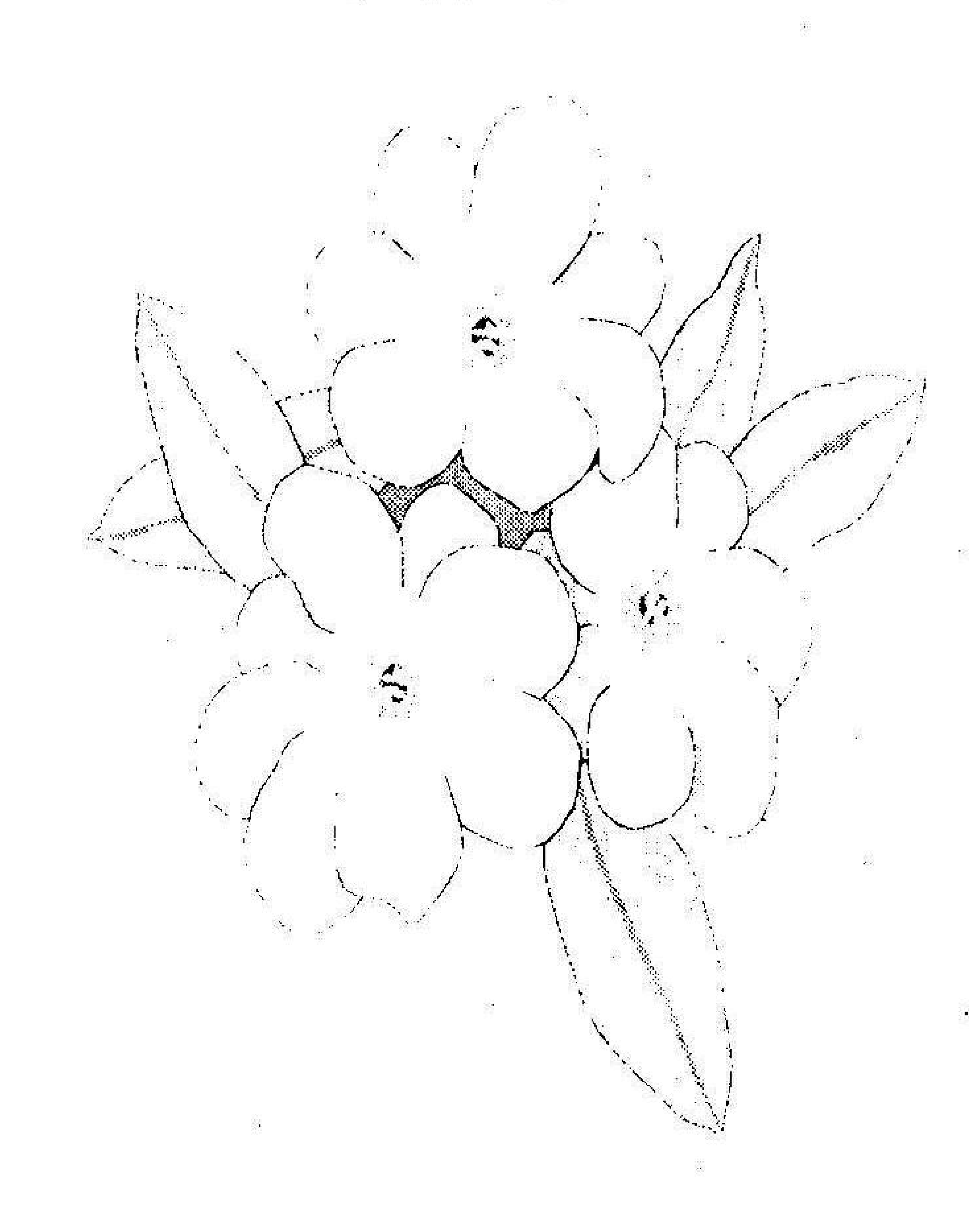
ب) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n.

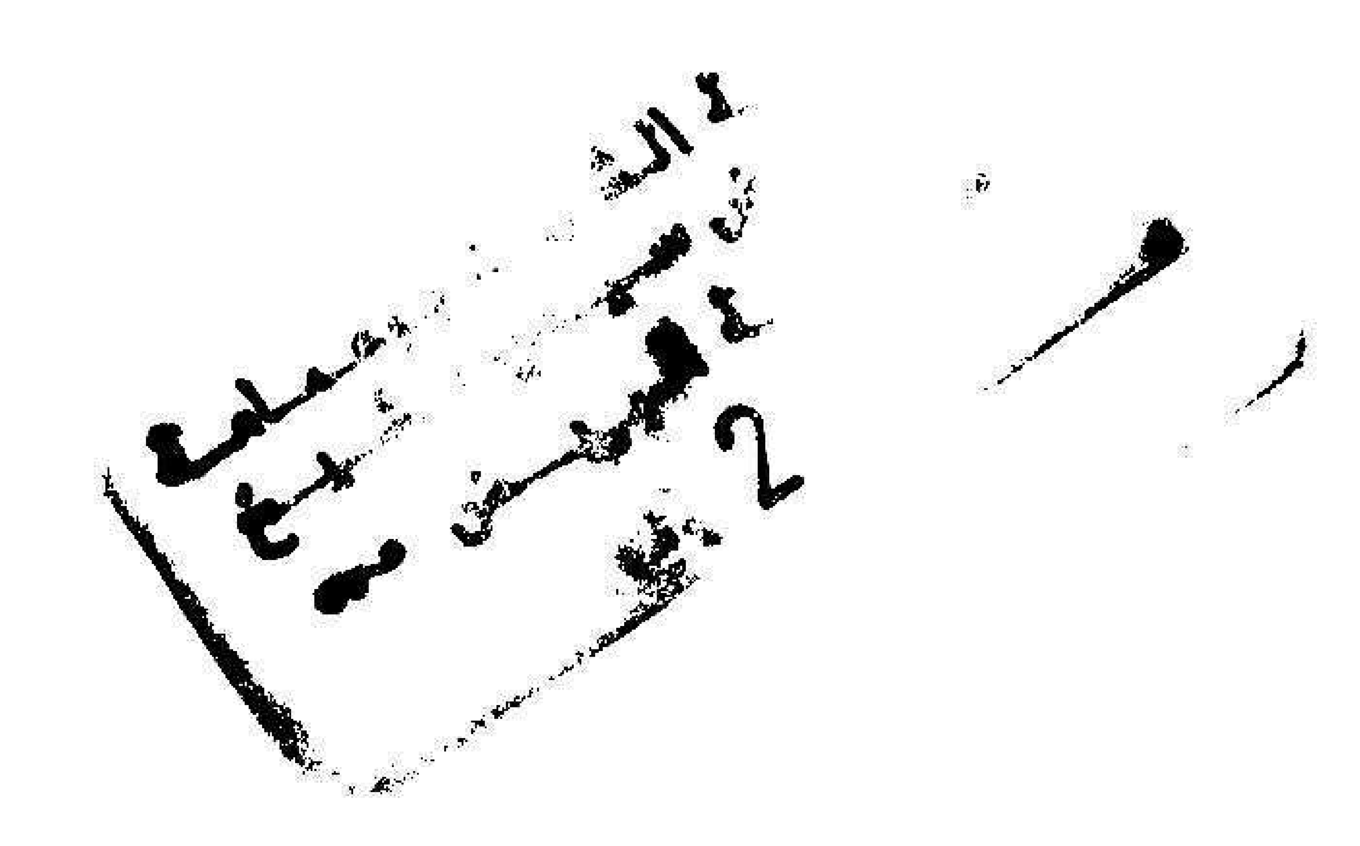
جـ) أوجد قيمة n حتى تكون $u_n = \frac{115}{16}$

3) أحسب : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$



﴿ربِّ اشرح لي صدري و يسّر لي أمري و أحلل عقدة من لساني
يفقهوا قولي﴾





Scanned by: Mekkaoui Ayoub
Email: ayoubsoft2011@hotmail.fr

الفهرس

الملخص 5

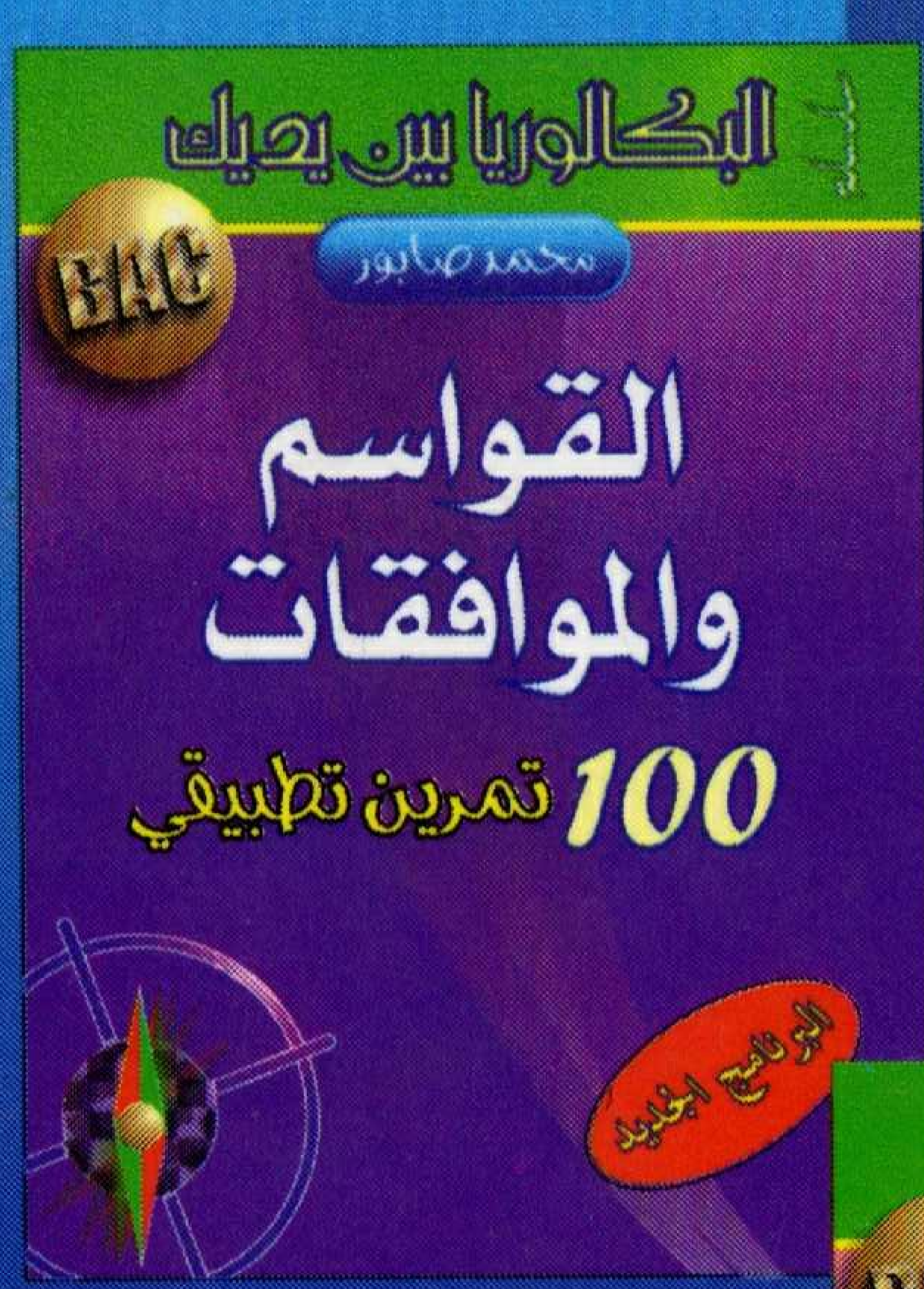
تمارين محلولة........................ 9

تمارين مرفقة بالحل 71

تمارين مقترحة للحل.............................. 101

- الفهرس 120

في نفس السلسلة



سلسلة البكالوريا بين يديك

BAC

محمد صابور

الأعداد المركبة

100 تمرين تطبيقي

البرنامج الجديد

ISBN : 978-9947-0-1865-1